



CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A.C.

Estrategias Evolutivas y Estimación de Distribuciones Aplicados a Problemas de Optimización en Ingeniería Estructural y Mecánica.

TESIS

Que para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias con Especialidad en Computación y
Matemáticas Industriales**

presenta

HUMBERTO ESQUEDA OLIVA

Dirigida por:

Dr. Salvador Botello Rionda. CIMAT.

Co-dirigida por:

Dr. Arturo Hernández Aguirre. CIMAT.

Dr. Francisco Zárate Araiza. CIMNE-UPC.

Asesores.

Dr. Mariano Rivera Meraz. CIMAT.

Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez. CIMAT.

Guanajuato, Gto. Diciembre de 2006

AGRADECIMIENTOS

Al Centro de Investigación en Matemáticas, que ha sido mi casa de estudios por más de 2 años. Al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) de Barcelona, en donde se desarrolló una parte muy importante de este trabajo. Al Dr. Eugenio Oñate por su interés en el desarrollo de este tipo de aplicaciones, lo que me abrió las puertas del CIMNE y con ello una gran diversidad de horizontes de trabajo.

Al Dr. Salvador Botello, la persona que más me ha impulsado desde hace más de 3 años, y quien más me motivó en la realización de este trabajo. Gracias a él estoy donde estoy ahora. Al Dr. Arturo Hernández, por sus valiosas ayudas sobre temas de computación evolutiva. Al Dr. Francisco Zárate, mi asesor en el CIMNE, quien me ayudó para la continuación de este trabajo. A Gerardo Valdes, mi compañero y amigo del CIMNE, por sus diversas orientaciones sobre temas de elementos finitos y mecánica de fluidos, por prestarme su programa para resolver problemas de interacción fluido-estructura, y sobre todo por ayudarme en todo lo que fue mi integración a la vida en Barcelona, al inicio y durante mi estancia en el CIMNE.

A mis compañeros del CIMAT, sobre todo a mis amigos Leonel, Ivvan, Justino, Alonso, Oscar, Antonio, Rocky y Pedro Pablo, por sus ayudas en diversas materias y sobre todo por hacer más agradable mi estancia en el CIMAT.

A mis compañeros y amigos del CIMNE Noel, Fernando, Alex, Daniel y Jordi, porque hicieron más agradables mis jornadas de trabajo en Barcelona, en fin, me hicieron sentir como en casa.

A todas las demás personas que de alguna forma me ayudaron antes y durante mi estancia en Barcelona.

Agradezco también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de México, por haberme brindado el apoyo económico que me permitió el desarrollo de este trabajo (beca 191450). También agradezco al CIMAT y al CIMNE las ayudas económicas que hicieron posible mi estancia en Barcelona.

INDICE

1	Introducción.	
	1.1 Planteamiento general del problema de optimización estructural.	1
	1.2 Algoritmos evolutivos. Antecedentes.	2
2	Estrategias Evolutivas.	
	2.1 Descripción general.	5
	2.2 Recombinación y mutación.	7
	2.3 Selección. Manejo de restricciones por ranqueo estocástico.	8
3	Algoritmos de Estimación de la Distribución.	
	3.1 Descripción general.	11
	3.2 Algoritmos discretos sin dependencias.	12
	3.3 Selección de la muestra de individuos para manejo de restricciones.	13
4	El método de elementos finitos.	
	4.1 Fundamentos del método. Elementos finitos de un continuo elástico.	15
	4.1 Problemas de dinámica de estructuras.	25
	4.2 Problemas de mecánica de fluidos.	26
	4.3 Interacción fluido-estructura.	29
5	Aplicaciones.	
	5.1 Optimización de armaduras metálicas. EDA's vs EE's.	31
	5.2 Un problema de interacción fluido-estructura. Optimización mediante EE's.	40
	5.3 Combinación de Estrategias Evolutivas y Estimación de Distribuciones. Aplicación en la optimización de armaduras metálicas.	48
6	Conclusiones y trabajo futuro.	59
	Referencias	60
	Anexo. Catálogo de perfiles utilizado en los ejemplos.	63

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1 Planteamiento general del problema de optimización estructural.

La optimización es un concepto muy importante en una gran parte de los campos de la ciencia y la tecnología. En cualquier actividad, continuamente se busca la maximización de los beneficios y la reducción de los recursos necesarios para llevarla a cabo. Dentro del campo de la ingeniería, son innumerables los problemas que requieren algún tipo de optimización. Se busca siempre la minimización del costo, cumpliendo con ciertas características de calidad y servicio. Dentro del costo pueden aparecer varios conceptos: materiales, tiempo, mano de obra, etc.

Algunos de los problemas más comunes de optimización en ingeniería tienen que ver con la minimización de los materiales requeridos para fabricar estructuras y piezas mecánicas, tratando de satisfacer ciertas condiciones de resistencia, durabilidad, funcionalidad y servicio. En este trabajo se abordarán específicamente dos tipos de problemas, uno del campo de la ingeniería civil, y otro de tipo académico que resulta un paso preliminar a la solución de muchos problemas de ingeniería mecánica, industrial, aeronáutica, civil, marítima, etc.

El primer problema tratado es la minimización del peso de armaduras metálicas. Las armaduras son estructuras cuyos miembros trabajan sólo bajo fuerzas axiales, y tienen una gran cantidad de aplicaciones al poder soportar grandes claros sin necesidad de apoyos intermedios, teniendo un peso propio relativamente pequeño comparado con las cargas que pueden soportar. Se utilizan sobre todo en cubiertas ligeras, en techos de naves industriales, en puentes de gran claro, y también se han empleado como elementos principales en estructuras de edificios altos. En suma, son una buena opción cuando se requiere salvar claros muy grandes. En el capítulo 5 se dará una descripción más detallada de este problema.

El segundo problema tratado es la minimización del peso de una lámina de metal sujeta a cargas generadas por la acción de un fluido que interactúa con ella. Estas cargas pueden deberse a acciones del viento, de agua o de otros tipos de fluidos, y son acciones de tipo dinámico, es decir, que varían con el tiempo. Aunque el problema abordado es sencillo desde un punto de vista práctico, su solución requiere de un gran esfuerzo computacional, pues el comportamiento de todo el conjunto se obtiene a través de simulaciones numéricas utilizando el método de los elementos finitos (MEF). Esta técnica es una herramienta muy poderosa que tiene una gran cantidad de aplicaciones en varias ramas de la ingeniería, pues permite conocer en forma muy aproximada el comportamiento de varios fenómenos reales sin la necesidad de construir una gran cantidad de costosos prototipos. Sin embargo, a pesar de sus ventajas innegables, el MEF requiere un esfuerzo computacional muy importante para obtener buenas aproximaciones de los fenómenos que se busca simular. En el capítulo 4 se dará una descripción general y muy breve de esta técnica, con bosquejo de las técnicas requeridas para resolver el problema específico de la interacción fluido-estructura.

1.2 Algoritmos Evolutivos. Antecedentes.

La otra parte medular de este trabajo radica en las herramientas utilizadas para realizar la optimización propiamente dicha. Existe una gran cantidad de técnicas numéricas para ello, aplicables a distintos tipos de problemas. Se pueden dividir en dos grandes grupos, a saber: las técnicas clásicas (también llamadas determinísticas), y las heurísticas.

Las primeras representan la mejor opción para un buen número de problemas, sobre todo aquellos donde el problema se puede expresar por medio de funciones algebraicas. Sin embargo, requieren cierta información que en ocasiones es difícil de obtener. La mayoría de estas técnicas requieren el gradiente o la primera derivada de la función objetivo (algunos hasta la segunda). Ello requiere que el problema sea continuo. Y si el problema tiene restricciones, también se ocupan las derivadas de las mismas. En muchos de los problemas prácticos de ingeniería, las variables son discretas, lo que imposibilita el uso de tales técnicas. Y si la evaluación de la función objetivo y las restricciones es resultado de simulaciones numéricas, el problema es aún mayor.

Es en esos casos cuando las técnicas heurísticas se convierten en una opción mucho más competitiva. Dichas técnicas tienen componentes estocásticos, y una definición posible es la siguiente: una técnica heurística es un procedimiento que busca soluciones buenas a un costo razonable, aunque sin garantizar la factibilidad u optimalidad de las mismas. A menos que la solución óptima del problema sea conocida, nunca se tiene la certeza de si la solución encontrada por estas técnicas es la mejor.

En problemas de optimización combinatoria, donde todas las variables son discretas, las técnicas heurísticas son prácticamente la única alternativa, debido a que en casi todos los problemas reales de este estilo los espacios de búsqueda son enormes, y no es posible hacer una búsqueda exhaustiva del óptimo al requerirse un tiempo exponencial para ello.

Un grupo de técnicas heurísticas muy exitosas son los algoritmos evolutivos (AE). Tuvieron su origen en los años 60's, y están inspirados en la evolución natural de las especies biológicas. Estos algoritmos utilizan la evolución artificial para resolver problemas de optimización, búsqueda, aprendizaje y simulación de sistemas dinámicos. Los AE difieren de otras técnicas de optimización más tradicionales, en que realizan una búsqueda a partir de una población de soluciones, no a partir de un solo punto. Estos algoritmos sustituyen el método de optimizar un punto por el de optimizar ciertas propiedades de una población de puntos. La información estadística de la población es aprovechada para orientar la búsqueda.

La característica principal de cualquier algoritmo evolutivo es una población P que representa un conjunto de soluciones, llamadas *individuos*. Por medio de diferentes operadores, la población “evoluciona” produciendo *hijos* (soluciones) cada vez mejores, de modo que los individuos compiten entre sí y los mejores individuos son los que “sobreviven” pasando a la siguiente generación. La estructura de los individuos es determinada a priori y es dependiente del dominio del problema, lo que implica que para cada problema debe idearse una representación adecuada, aunque la forma de operar de los AE no depende del tipo de problema. Lo que sí es necesario es una medida comparativa de los individuos, un valor al que llamamos *aptitud*. Un individuo con mejor aptitud que otro representa una mejor solución. Debe tenerse alguna manera de determinar este valor, y que es dependiente del tipo de problema.

En el caso de problemas de optimización, se utiliza como aptitud el valor de la función objetivo del problema. Si el problema de optimización tiene restricciones, se requiere alguna manera de incorporarlas a la función de aptitud. Se han propuesto varios mecanismos de penalización de la aptitud, aunque a últimas fechas han aparecido otras formas de manejar las restricciones. Una de las técnicas más exitosas es el *rankeo estocástico*, un método especial de ordenamiento que se describe al final del Capítulo 2.

En un AE cada generación realiza una selección competitiva que elimina las peores soluciones, mientras que las mejores son recombinadas con otras, intercambiándose partes de una solución con otra. Las soluciones también son mutadas haciendo pequeños cambios en simples elementos de ésta. La recombinación y la mutación se usan para generar nuevas soluciones en las regiones del espacio donde ya se han visto las mejores. Existen muchos algoritmos de este tipo, y cada vez resulta más difícil distinguir entre todos ellos. Hay varios paradigmas principales, a saber: los Algoritmos Genéticos, la Programación Evolutiva, y las Estrategias Evolutivas. En este trabajo se utilizarán las estrategias evolutivas en algunas de las aplicaciones. En el capítulo 2 se describirán en forma más detallada.

Existen otras técnicas evolutivas de más reciente desarrollo, como la Evolución Diferencial, las técnicas de partículas (PSO), y los Algoritmos de Estimación de la Distribución (EDA).

Estas últimas son muy diferentes a las demás, pues no usan operadores de recombinación ni de mutación en su interpretación común, sino que estiman la distribución de probabilidad de los mejores individuos y luego generan otros por simulación sobre las distribuciones estimadas. Estos algoritmos surgieron como resultado de investigar las dificultades de los algoritmos genéticos para optimizar funciones con interacciones no lineales entre las variables. Un EDA, a partir de una muestra de soluciones tomadas de la población (generalmente, las mejores soluciones con respecto a la función objetivo del problema de optimización), estima una distribución de probabilidad que captura las dependencias entre las variables. Esta distribución se utiliza para generar nuevas soluciones que formarán una nueva población. En este trabajo también se utilizará esta clase de algoritmos para la solución de los problemas. Se dará una descripción más amplia en el capítulo 3.

El **objetivo** de este trabajo es investigar y comparar la capacidad de los Algoritmos de la Estimación de la Distribución y las Estrategias Evolutivas en la solución de problemas de optimización de estructuras y piezas mecánicas de costosa evaluación. Como se ha esbozado, la solución de dichos problemas con las técnicas clásicas resulta sumamente complicada, y en muchos casos ni siquiera es posible aplicar tales técnicas. En el capítulo 5 se presentan las aplicaciones y los resultados de los experimentos realizados.

Finalmente, se propone un algoritmo que resulta de la combinación entre las estrategias evolutivas y los EDA's, y se compara su desempeño con el de las dos técnicas por separado. Se espera que el algoritmo combinado obtenga mejores resultados que los otros dos.

CAPÍTULO 2

Estrategias Evolutivas

Las estrategias evolutivas son técnicas que imitan los procesos evolutivos de las especies en la naturaleza, como se mencionó en la introducción. Como todo algoritmo evolutivo, están basadas en una población de individuos, y utilizan los operadores de *recombinación*, *mutación* y *selección* en la búsqueda de la mejor solución.

El origen de esta técnica ocurrió durante los años 60's en Alemania, cuando los estudiantes de la Universidad Técnica de Berlín Ingo Rechenbeg y Paul Schwefel realizaron una serie de experimentos con un túnel de viento. Los problemas que atacaron eran de optimización de problemas hidrodinámicos. Debido a que resultaba imposible resolver tales problemas en forma analítica o por medio de métodos numéricos tradicionales basados en el gradiente, Rechenberg propuso un método de ajustes discretos aleatorios inspirado en el mecanismo de mutación que ocurre en la naturaleza. Sabiendo que en la naturaleza las mutaciones pequeñas ocurren con mayor frecuencia que las grandes, decidieron hacer estos cambios con base a una distribución binomial con varianza prefijada.

El mecanismo básico de estas estrategias era crear una mutación, ajustar el experimento de acuerdo a ella, efectuar el análisis correspondiente y determinar qué tan buena era la solución. Si era mejor que la anterior, se utilizaba como base del siguiente experimento. La estrategia dio resultados inesperadamente buenos pese a su sencillez. Poco después, Schwefel empezó a probar el nuevo método en una computadora. Así fue como nacieron las Estrategias Evolutivas. En las referencias [1] y [2] se da una descripción breve pero mucho más completa del origen de estas estrategias, así como sus variantes modernas más utilizadas. En los apartados siguientes se dará una descripción general de las estrategias evolutivas, centradas en las variantes particulares manejadas en este trabajo.

2.1 Descripción general.

La versión original de las estrategias evolutivas es la llamada EE-(1+1), denominada así porque trabaja únicamente con dos individuos: un padre que por medio de mutación produce un solo hijo. Ambos se someten a una selección donde el individuo con mejor aptitud es el que pasa a la siguiente generación, convirtiéndose en el nuevo padre. Más tarde aparecieron las estrategias multimiembro EE-(μ , λ) y EE-(μ + λ), donde un conjunto de μ padres se utiliza para generar λ hijos. La diferencia entre estos dos modelos estriba en la forma en que se realiza la selección de los μ padres de la siguiente generación. En la estrategia evolutiva EE-(μ + λ), los μ padres junto con todos sus λ hijos son reunidos en un mismo conjunto del cual se seleccionan los μ individuos con mejor aptitud, los cuales pasan a ser los padres de la siguiente generación. En la estrategia EE-(μ , λ), los μ individuos que pasan a la siguiente generación son seleccionados exclusivamente entre los λ hijos producidos, sin importar si son mejores o no que sus padres. En esta variante, es imperativo que λ sea mayor que μ .

Para la generación de los λ hijos, se utilizan los operadores de recombinación y mutación de los μ padres. La recombinación consiste en el intercambio de información entre las variables objetivo de los padres, y hay varias maneras de hacerla. En el apartado siguiente se abordarán las diversas formas que se utilizan para realizar la recombinación en estrategias evolutivas.

Las mutaciones en las estrategias evolutivas usan un control sobre el tamaño del cambio aleatorio (desviación estándar). En la estrategia original de Rechenberg, se utilizó una regla empírica que adaptaba la desviación estándar para tratar de obtener mejores mutaciones. Esta regla, llamada del “éxito de 1/5”, establecía que la relación de las mutaciones exitosas contra el total de las mutaciones debía ser de 1/5. Si la relación era menor se reducía la desviación estándar, y si era mayor se aumentaba. La idea detrás de esta regla es que si la mutación produce cambios exitosos deben seguirse haciendo mutaciones grandes, en caso contrario los cambios deben ser pequeños. En trabajos posteriores [1,3,4] se comprobó que esta regla disminuye la efectividad del método, pues si bien se aumenta la velocidad de convergencia hacia la solución, se disminuye la probabilidad de encontrarla.

En las formas más modernas EE-(μ,λ) y EE-($\mu+\lambda$) de las estrategias evolutivas no se utiliza la regla del 1/5 para modificar las desviaciones estándar, sino que ahora éstas forman parte de la información de cada uno de los individuos de la población, y por lo tanto también se les aplican los operadores de recombinación y mutación para modificarlas, teniéndose entonces un proceso auto-adaptable. Entonces, la evolución de los parámetros de mutación se vuelve tan importante como la evolución de las variables objetivo de la población. Al volverse parte de la información de los individuos, las desviaciones estándar tienen que ser incluidas dentro de la representación de los mismos. Entonces, la estructura de los individuos tiene la forma

$$\langle X, \sigma \rangle = \langle [x_1, x_2, \dots, x_n], [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n] \rangle$$

Donde X son las variables objetivo, y las desviaciones estándar σ se les llama *variables de control*. Cada variable objetivo tiene asociada una variable de control correspondiente.

De la exposición dada, se tiene que la mutación es el operador más importante de las estrategias evolutivas. El algoritmo general de una estrategia evolutiva es el siguiente:

Iniciar con una población de μ padres y evaluar su aptitud.

Repetir desde $t=0$ hasta $t= max_gen$

- Recombinación: producir λ hijos a partir de los μ padres, recombinando variables de control y variables objetivo.
- Mutación: realizar una mutación a cada uno de los λ hijos. Primero deben mutarse las variables de control, y luego se hace la mutación de las variables objetivo.
- Evaluación: calcular la aptitud de cada hijo.
- Selección: Seleccionar los μ individuos que pasan a la siguiente generación.

El algoritmo descrito es bastante general, y engloba a las dos técnicas mencionadas EE-(μ,λ) y EE-($\mu+\lambda$), distinguiéndose una de otra a la hora de aplicar el operador de selección. Puede añadirse al algoritmo criterios de paro adicionales al número máximo de generaciones, basados en estancamiento y/o convergencia de la solución. En las secciones siguientes se tratarán los operadores en forma más detallada.

2.2 Recombinación y mutación.

La recombinación es el operador con el cual la información contenida en los individuos de la población es compartida para crear nuevos individuos. Se tienen dos formas básicas de hacer la recombinación: la *sexual*, en la que se eligen dos padres para la recombinación de todos los parámetros, y la *panmítica*. En este tipo de recombinación, en la generación de cada hijo se elige un solo padre, el cual se utiliza en la recombinación de todos los parámetros, pero se elige un padre distinto para hacer la recombinación de cada uno de los parámetros, tal como se muestra en la parte derecha de la Figura 2.1. La selección de los padres que intervendrán en la recombinación se hace en forma aleatoria, sin tener preferencia por alguno de ellos (en la recombinación panmítica puede haber padres repetidos).

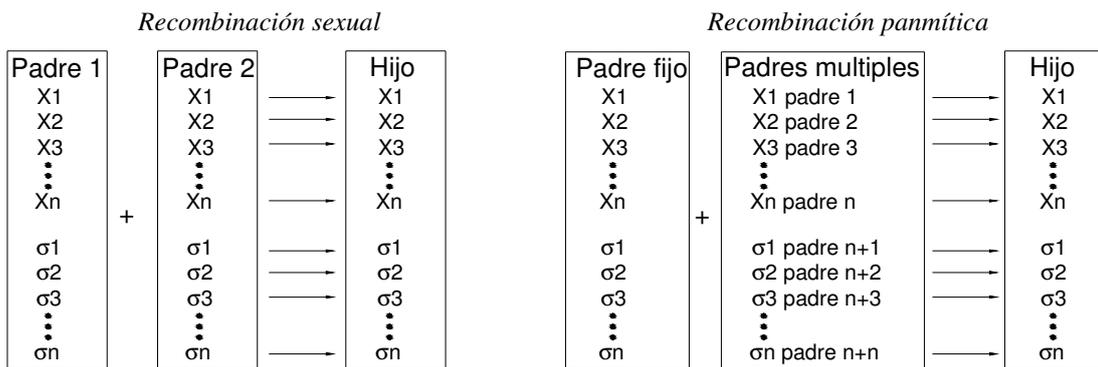


Figura 2.1 Esquemas básicos de recombinación en Estrategias Evolutivas.

Para las dos formas mencionadas de la recombinación se tienen las mismas variantes numéricas de hacerlas. Estas formas son:

- Recombinación discreta. Cada parámetro toma el valor de uno de los padres escogido al azar.
- Intermedia: Si x_1 y x_2 son los valores de los padres, el valor del hijo estará dado por $x = (x_1 + x_2)/2$.
- Generalizada: Si x_1 y x_2 son los valores de los padres, el valor del hijo estará dado por $x = x_1 + \eta(x_2 - x_1)$, donde η es un número aleatorio en el rango $[0,1]$

La recombinación sexual produce hijos que se ubican a distancias intermedias entre los dos padres, permitiendo la exploración del espacio entre ellos. La recombinación panmítica produce hijos dispersos por todas partes del espacio en que se encuentran los padres. Pueden utilizarse reglas diferentes para hacer la recombinación de las variables objetivo y de las variables de control.

Como se había dicho antes, la mutación es el operador principal de las estrategias evolutivas, consistente en alterar una variable mediante un número aleatorio, y son estas mutaciones las que efectúan la búsqueda esencial. Primero deben mutarse las variables de control, y posteriormente las variables objetivo. La mutación de las variables de control se realiza mediante [5]

$$\sigma'_i = \sigma_i \exp(\tau N + \alpha N_i) \quad \text{con} \quad \tau = \frac{1}{4n^{0.25}} \quad \text{y} \quad \tau' = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Donde n es el número de variables objetivo, y N_i y N son números aleatorios con distribución normal con media cero y desviación estándar 1. La diferencia es que N_i se genera para cada variable de control, mientras que N permanece fijo durante toda la mutación. τ y τ' son constantes equivalentes en función al factor de aprendizaje en las redes neuronales. Como se ve en las ecuaciones mencionadas, la mutación de las variables de control consiste en multiplicar la variable en cuestión por un exponencial elevado a un número aleatorio, el cual puede ser positivo o negativo, de forma tal que la variable de control puede crecer o decrecer, pero siempre es positiva. Una vez efectuada la mutación de las variables de control se procede a la mutación de las variables objetivo mediante

$$x'_i = x_i + N(0, \sigma_i)$$

Las mutaciones de las variables objetivo se hacen por adición de un número aleatorio con distribución normal con media cero y desviación estándar correspondiente al valor de la variable de control. El uso de mutaciones con distribución normal tiene el propósito de que los cambios pequeños sean más probables que los grandes.

Existe una forma más elaborada de realizar las mutaciones [2,3], llamadas *mutaciones correlacionadas*, que tratan de acelerar la velocidad de convergencia mediante la orientación de las mutaciones en ciertas direcciones. En este trabajo no se emplearon tales mutaciones debido a que los problemas abordados tienen variables discretas.

Las estrategias evolutivas están dirigidas sobre todo a la solución de problemas continuos, pero pueden emplearse también en problemas discretos con pequeñas modificaciones [7]. Es conveniente establecer valores máximos y mínimos para las variables de control, y lo es más cuando se trata de resolver problemas discretos con espacios de solución acotados. Para inicializar las variables de control resulta útil utilizar la expresión

$$\sigma_i = \frac{(x_{i \max} - x_{i \min})}{\sqrt{n}}$$

En dicha expresión se utilizan los valores máximo y mínimo de las variables objetivo presentes en la población. También resulta útil utilizarla cuando se aplican recortes al espacio de búsqueda, a fin de concentrar las mutaciones en la región de interés.

En las referencias [1] a [6] se puede encontrar descripciones mucho más amplias sobre los operadores y el desarrollo de las estrategias evolutivas.

2.3 Selección. Manejo de restricciones por ranqueo estocástico.

Uno de los operadores fundamentales en todo algoritmo evolutivo es el de selección, pues es el que decide cuáles individuos son los que pasarán a la siguiente generación para generar nuevos individuos. En estrategias evolutivas aplicadas en optimización mono objetivo sin restricciones, lo que se emplea es un simple ordenamiento de los individuos por su valor de aptitud, y se seleccionan los μ individuos mejor posicionados después de efectuar el ordenamiento. Pero si se trata de resolver problemas multiobjetivo o con restricciones (o ambas), el asunto de la selección ya no es tan sencillo. En este trabajo en particular se abordan problemas de optimización mono objetivo con restricciones, por lo cual nos centraremos únicamente en una técnica que nos permita el manejo de tales problemas.

En la literatura figuran algunas técnicas de selección para problemas de optimización con restricciones, la gran mayoría de ellas basadas en aplicar alguna forma de penalización al valor de aptitud. Una determinada solución es penalizada en su valor de aptitud según si viola o no las restricciones del problema. A simple vista, la técnica de penalizaciones parece ser una forma adecuada para manejar las restricciones del problema. La cuestión aquí es cómo llevar a cabo tales penalizaciones. Una penalización muy baja no producirá resultados apreciables, y una penalización muy alta favorecerá ampliamente la proliferación de individuos factibles, lo que hará que la población se mueva por completo hacia la región factible del espacio de búsqueda, instalándose ahí una vez que la encuentre. Esto resulta muy adecuado en aquellos problemas donde la solución óptima se encuentra adentro de la región factible del espacio de búsqueda.

Sin embargo, hay una gran cantidad de problemas donde la solución óptima se encuentra justo en la frontera de la región factible, por lo que en tales casos resulta difícil mover la población hacia esa zona una vez que se instala dentro de la región factible si se usan métodos de penalización de la aptitud. Más aún cuando se tienen restricciones de igualdad, las cuales requieren un manejo especial.

Debido a que las restricciones tienen una naturaleza muy diferente de acuerdo al tipo de problema, se vuelve una tarea muy difícil elegir una forma adecuada de penalización. Inclusive en un mismo problema, no es fácil saber cuál de las restricciones es la que condiciona en mayor medida a la solución, de tal forma que se complica mucho el decidir cuál restricción debe tener una penalización mayor en caso de no ser satisfecha. Aún cuando se encuentre una función de penalización adecuada, es difícil hacer un balance adecuado entre soluciones factibles y no factibles en la selección de individuos cuando se tienen problemas cuya solución óptima se encuentra en la frontera de la región factible o cuando se tienen restricciones de igualdad, ya que en esos casos pueden tenerse individuos no factibles pero muy cercanos a la solución, y tales individuos corren el riesgo de ser eliminados de la población.

En el año 2000, T. Runarsson y X. Yao publicaron una forma distinta para el manejo de restricciones, denominado *ranqueo estocástico* [8]. El método, aunque sencillo, arrojó resultados extraordinariamente buenos. No requiere una función de penalización muy elaborada, y resulta igual de útil tanto para problemas con soluciones en la frontera de la región factible, como para aquellos donde el óptimo se encuentra totalmente dentro de dicha zona.

El mecanismo mencionado consiste en realizar un ordenamiento de los individuos por medio de un algoritmo tipo burbuja, pero haciendo las comparaciones de la manera siguiente:

- Si ambos individuos son factibles, se hace la comparación por valor de aptitud.
- Si uno o ambos individuos no son factibles, hacer la comparación por valor de aptitud o bien por valor de penalización al azar. Esto es, se tira un volado y según el resultado, la comparación se hace de una u otra forma.

El orden inicial de los individuos debe ser aleatorio. Aunque el proceso de ordenamiento está basado en el método de la burbuja, se recomienda que el número de barridas dadas a la población sea menor que el tamaño de la población, lo que reduce el costo del algoritmo y proporciona un excelente balance entre individuos factibles y no factibles que pasan a ser seleccionados. El algoritmo es el siguiente:

```
for i=1 to  $N$  do  
  for j=1 to  $P-1$  do  
     $u = U(0,1)$  (número uniforme entre cero y uno)  
    if(( $p(I_j) = p(I_{j+1}) = 0$ ) or ( $u < P_j$ )) then  
      if( $f(I_j) > f(I_{j+1})$ )  
        swap ( $I_j, I_{j+1}$ )  
      else  
        if( $p(I_j) > p(I_{j+1})$ )  
          swap ( $I_j, I_{j+1}$ )  
    endfor  
    if(no swap) break  
endfor.
```

En el algoritmo listado, N es el número de barridas a la población, P es el número de individuos, $p(I)$ es la función de penalización del individuo I (vale cero en caso de que el individuo no viole ninguna de las restricciones), $f(I)$ es el valor de aptitud del individuo I , y P_f es un parámetro del algoritmo, cuyo valor recomendado es de 0.45 [8]. Como se había dicho, es recomendable que N sea algo menor que P .

Para la implementación en particular que se manejó en este trabajo, la función de penalización se escogió simplemente como la suma de los valores de las restricciones violadas. Entonces, el mecanismo de selección empleado aquí es escoger los μ individuos mejor posicionados después de aplicar el ranqueo estocástico a los $\mu + \lambda$ individuos de la población. No se empleó la estrategia evolutiva EE-(μ, λ), ya que nos interesa conservar siempre las mejores soluciones obtenidas a lo largo del proceso evolutivo.

CAPÍTULO 3

Algoritmos de estimación de la distribución.

Los Algoritmos de Estimación de la Distribución (EDA's) son los algoritmos de aparición más reciente dentro del campo de la computación evolutiva. Al igual que otros algoritmos estocásticos basados en poblaciones, como los algoritmos genéticos y las estrategias evolutivas, los EDA's parten de una población inicial, la cual evoluciona a lo largo de la ejecución obteniéndose individuos cada vez mejores. Sin embargo, el principio de funcionamiento de estos algoritmos es muy diferente al de aquellos, pues no utiliza los operadores de recombinación y mutación. Como su nombre lo indican, los EDA's tratan de estimar la distribución de probabilidad de ocurrencia de la población por medio de una muestra de individuos, con la finalidad de generar una nueva población a partir de la distribución estimada. En su concepción original, y que es la más ampliamente explorada, los EDA's fueron utilizados al estilo de los algoritmos genéticos, codificando los individuos en cadenas binarias. Sin embargo los conceptos de los EDA's son totalmente generales y fácilmente se pueden extender a alfabetos mayores a 2. Ese es el tipo de implementación que se manejará en este trabajo.

3.1 Descripción general.

En general, los EDA's se pueden clasificar de dos formas diferentes. Según el tipo de problemas a los que están orientados, los EDA's se dividen en algoritmos para problemas continuos y los que están dirigidos a problemas discretos. Según la complejidad del modelo probabilístico utilizado, se tienen algoritmos que consideran relaciones de dependencias y EDA's que consideran independencia.

Los EDA's requieren la construcción de modelos de la distribución de probabilidad cuya complejidad está asociada con la capacidad del modelo para utilizar conocimiento sobre la estructura de dependencias probabilísticas de un problema (conjunto de relaciones de dependencia/independencia probabilística entre las variables del problema). Mientras más información sobre esta estructura se captura, más complejo es el modelo y mientras más complejo es el modelo, más puntos se necesitan para su correcta estimación. Para un mismo conjunto de datos, diferentes modelos pueden estimarse con menor o mayor fiabilidad. Esto en ningún modo quiere decir que los modelos mejor estimados son los que mejor describen las propiedades de la distribución de los datos. El caso ideal es el de una distribución que se describe adecuadamente por un modelo sencillo y que por tanto, necesita menos puntos para ser estimado fiablemente, que uno más complejo. En los EDA la complejidad se relaciona directamente con el tipo de distribuciones que manejan: mientras más complejo es el modelo, también lo es el algoritmo EDA que lo utiliza. El problema de estimar la distribución es en general intratable, pero puede hacerse tratable si se supone a priori el tipo de distribución.

Por todo lo anterior, y debido al tipo de aplicaciones que se manejarán en este trabajo, nos centraremos en algoritmos sin dependencias orientados a problemas discretos. En contra de lo que pudiera pensarse, los algoritmos con dependencias entre variables para problemas discretos no producen resultados mucho mejores a los algoritmos sin dependencias (salvo en casos donde las variables son binarias), ya que requieren una mayor cantidad de información para estimar

adecuadamente la distribución de probabilidad. En términos de algoritmos evolutivos, ello se traduce en la necesidad de utilizar poblaciones muy grandes, lo que hace que este tipo de algoritmos se conviertan en una opción muy poco atractiva frente a otros algoritmos evolutivos en la solución de problemas prácticos.

La estructura general de un EDA es la siguiente:

Comenzar con una población inicial P_0 , por lo común generada en forma aleatoria, y evaluar la aptitud de los individuos.

- Por medio de algún criterio de selección, obtener una muestra S de individuos de la población. Debe cumplirse que $S < P$.
- Estimar la distribución de probabilidad de las variables objetivo utilizando la muestra S de individuos.
- Generar una nueva población P de individuos con la distribución de probabilidad obtenida en el paso anterior, y evaluar la aptitud de los individuos.
- Detener el algoritmo si se cumple un criterio de parada, en caso contrario se continúa el proceso.

Como se ve en el algoritmo general, el único operador que el EDA comparte con el resto de los evolutivos es el de selección. En muchas ocasiones se le da a este operador una importancia secundaria, aunque la realidad es que la forma de hacer la selección es fundamental para que el algoritmo encuentre buenos resultados. En el último apartado de este capítulo se abordará el método de selección utilizado en este trabajo, el cual está orientado a la solución de problemas de optimización con restricciones. En las referencias [12] y [13] se puede encontrar una descripción más amplia sobre una gran variedad de EDA's, así como discusiones y más referencias sobre la teoría y aplicaciones de estos algoritmos.

3.2 Algoritmos discretos sin dependencias.

En la literatura figuran dos algoritmos de este tipo. El primero de ellos es el PBIL (*Population Based Incremental Learning*) de Baluja y Caruana [9, 10]; el segundo es el UMDA (*Univariate Marginal Distribution Algorithm*) de Mühlenbein [11]. Ambos algoritmos son muy parecidos, y como se verá a continuación, el UMDA puede considerarse como un caso particular del PBIL. Ambos algoritmos consideran que la distribución de probabilidad de la población se puede factorizar como el producto de sus distribuciones marginales univariadas, lo que equivale a considerar que las variables son independientes entre sí.

El algoritmo PBIL, tal como se menciona en [9], utiliza la siguiente regla de actualización de la probabilidad marginal

$$P_t = (1 - \alpha)P_{t-1} + \alpha P_{S_t}$$

Donde P_t es la probabilidad en la generación t , P_{S_t} es la probabilidad de la muestra S de la población en la generación t , y α es un número real entre cero y uno denominado “parámetro de aprendizaje” (learning rate). Esta regla de actualización está inspirada en la regla de aprendizaje de las redes neuronales. El valor de α sirve para controlar la velocidad a la cual la distribución de probabilidad se acerca a la distribución obtenida de la muestra, preservando información de generaciones anteriores. En el caso de $\alpha=0$, el algoritmo PBIL se reduce al algoritmo UMDA. El vector P_{S_t} se calcula simplemente con las frecuencias marginales de la

muestra de individuos. Aunque en los artículos citados sólo se manejan variables binarias, los principios de estos algoritmos son totalmente generales y se puede aplicar fácilmente a problemas con variables que tienen más de 2 valores. Entonces, para cada variable del problema se tiene un vector de probabilidades de longitud igual al número de valores diferentes que puede tomar dicha variable, como se muestra en la Figura 3.1

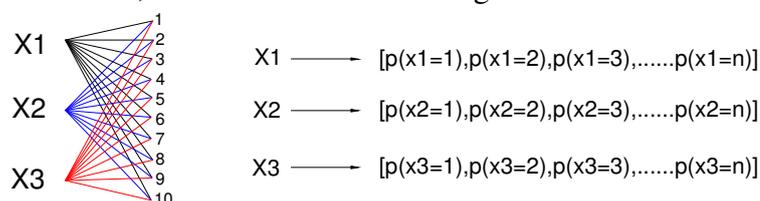


Figura 3.1. Representación de los individuos en PBIL mediante vectores de probabilidad marginal.

Para generar nuevos individuos y formar la nueva población de la generación $t+1$, muestreamos la distribución P_t . Dado que se considera que todas las variables son independientes, para muestrear la distribución conjunta P sólo se requiere muestrear las distribuciones marginales de cada variable, utilizando las probabilidades acumuladas (la distribución propiamente dicha) como se muestra en la Figura 3.2.

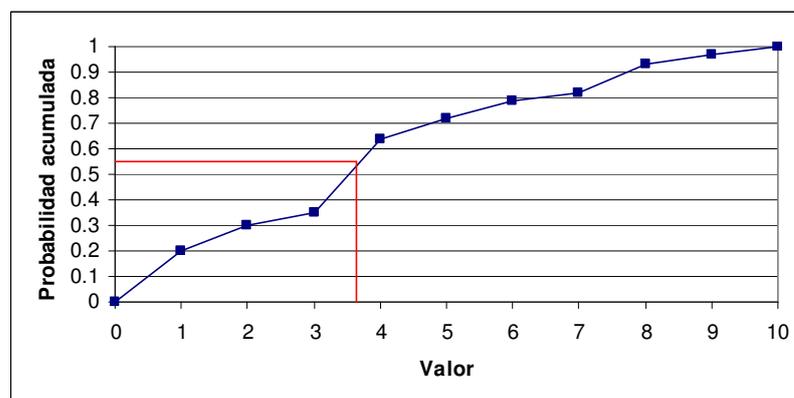


Figura 3.2 Ejemplo de muestreo de una distribución de probabilidad marginal acumulada. La variable en cuestión tiene 10 valores posibles.

Se genera un número aleatorio entre 0 y 1, y tomamos como valor para la variable en cuestión el número entero que tenga una probabilidad acumulada mayor que el número aleatorio generado (Figura 3.2). En el ejemplo mostrado, la gráfica corresponde a la distribución de probabilidad acumulada. El número aleatorio generado tiene un valor de 0.55, y observando la gráfica, se tiene que le corresponde un valor de 4 según la distribución acumulada. Este mecanismo tan sencillo es la implementación que se manejará en este trabajo.

Debemos observar que el EDA por sí solo no garantiza la conservación de el/los individuos con mejor aptitud, a diferencia de las estrategias evolutivas que poseen elitismo implícito. Entonces, es necesario agregarle elitismo explícito al EDA para garantizar la conservación del mejor individuo encontrado en el proceso.

3.3 Selección de la muestra de individuos. Manejo de restricciones.

Además del modelo de distribución de probabilidad considerado, un aspecto muy importante en EDA's es la selección de la muestra de individuos que servirá para estimar la distribución y generar la siguiente población. El caso de los problemas de optimización con

restricciones, la forma de elegir la muestra de la población hará que la misma se mueva rápida o lentamente hacia la zona factible, donde se encuentra el óptimo.

Como se ha mencionado antes, en muchos de los problemas de optimización con restricciones el óptimo se encuentra localizado sobre la frontera de la zona factible o muy cerca de ella. Si hacemos el muestreo de forma tal que se elijan solo a individuos factibles, será muy difícil encontrar el óptimo del problema una vez que la población alcance la zona factible, dado que las variables presentarán una probabilidad baja para valores cercanos a la frontera. Por lo tanto, al momento de seleccionar la muestra de individuos de la población, será necesario incluir individuos tanto factibles como no factibles. Esto incrementará la probabilidad de los valores cercanos a las fronteras de la zona factible, y nos mantendrá individuos adentro y afuera de la misma. Aunque esto puede no ser útil en problemas donde la solución se encuentre completamente inmersa en la región factible, no es el caso de los problemas que se abordarán en este trabajo.

El otro problema es cómo hacer el muestreo de los individuos ya clasificados de acuerdo a su factibilidad. ¿Qué tan malos deben ser los individuos “malos” de la población para que nos ayuden a encontrar el óptimo? ¿Qué tan buenos deben ser los “buenos”? No es fácil saberlo, no hay una regla general para todos los problemas. En la implementación particular utilizada en este trabajo, se manejará como parámetro de entrada una proporción fija de individuos factibles y no factibles en la muestra, la cual tratará de ser mantenida en la medida de lo posible. Entonces, se elegirá a los mejores individuos factibles hasta completar los necesarios para tener la proporción deseada de ellos en la muestra. En el caso de los individuos no factibles, seleccionaremos aquellos que violen menos las restricciones, hasta completar los individuos necesarios para llenar la muestra. Pueden darse casos donde haya menos individuos disponibles en la población al número necesario para mantener la proporción deseada. En el caso de que los faltantes sean individuos factibles, se incluirán en la muestra sólo a los que estén disponibles, y la muestra será completada con los individuos que violen menos las restricciones. Si los que faltan son individuos no factibles, entonces serán repetidos en la muestra hasta alcanzar el número deseado.

El algoritmo para realizar la selección se muestra a continuación, siendo m el tamaño de la muestra y p la proporción deseada de individuos factibles en ella.

- Clasificar los individuos de la población \mathbf{P} en factibles (\mathbf{F}) y no factibles (\mathbf{N}).
- Ordenar \mathbf{F} por valor de aptitud.
- Ordenar \mathbf{N} por suma de violación de restricciones.
- Poner en la muestra los primeros mp individuos factibles. Si $mp < \mathbf{F}$, ponemos a todos los \mathbf{F} individuos factibles en la muestra.
- Poner en la muestra los primeros individuos no factibles de \mathbf{N} hasta llenar la muestra. Si no alcanzan, repetimos individuos en orden hasta completar el tamaño de la muestra. Si no hay individuos no factibles, se reduce el tamaño de la muestra a mp .

También puede emplearse el ranqueo estocástico mencionado en el Capítulo 2 para hacer la selección de la muestra de individuos, pero ello se dejará para más adelante, dentro de las aplicaciones.

CAPÍTULO 4

El método de los elementos finitos.

El propósito de este capítulo es intentar dar una idea muy general de lo que implica el uso del método de elementos finitos en la simulación de estructuras y piezas mecánicas que interactúan con un fluido en movimiento. Este método resulta una herramienta muy poderosa para la simulación numérica en problemas de ingeniería, y en la actualidad se aplica a una gran variedad de problemas cuya solución era prácticamente inabordable en el pasado, salvo en algunos casos particulares muy simples. La primera parte del capítulo trata sobre el método de elementos finitos aplicados a problemas de mecánica de sólidos elástico-lineales, la segunda sobre problemas de dinámica de sólidos y la tercera sobre mecánica de fluidos, que son las herramientas necesarias para la solución de un problema tratado en el Capítulo 5. El capítulo entero está basado en el material de las referencias [18] a [21].

Entrar en mayor detalle en los temas mencionados queda completamente fuera del alcance de este trabajo, ya que el método interesa más por la aplicación utilizada que por el método en sí. En la literatura referente al método se puede encontrar una amplia información sobre el desarrollo y aplicación del MEF en los problemas de dinámica de sólidos y fluidos.

4.1 Fundamentos del método. Elementos finitos de un continuo elástico.

Introducción

El proceso de aproximar el comportamiento de un continuo mediante elementos finitos que se comportan de una forma similar a los elementos reales, “discretos”, se puede introducir mediante aplicaciones físicas específicas o como un concepto matemático general. Al seguir el primero se limita la perspectiva a un conjunto de problemas asociados a la mecánica estructural, que históricamente fueron los primeros a los que se aplicó el MEF, pero los conceptos se asimilan más fácilmente, y la extensión a otro tipo de problemas no resulta difícil una vez asimilados los conceptos básicos.

Son muchas las facetas de la ingeniería en las que se precisa determinar la distribución de esfuerzos y deformaciones en un continuo elástico. Los casos particulares de dichos problemas pueden variar desde problemas bidimensionales de esfuerzo plano o deformación plana, sólidos de revolución y flexión en placas y láminas, hasta el análisis más general de sólidos tridimensionales. En todos los casos, el número de interconexiones entre un “elemento finito” cualquiera rodeado por fronteras imaginarias y los elementos vecinos a él es infinito. Es difícil, por consiguiente, saber a primera vista cómo pueden discretizarse problemas de este tipo para casos de estructuras más simples. Esta dificultad puede superarse (y efectuarse la aproximación) de la siguiente manera:

1. El continuo se divide, mediante líneas o superficies imaginarias, en un número finito de elementos de forma simple, o mejor dicho, en una *mall*a de elementos finitos.
2. Se supone que los elementos finitos están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos, que llamamos nodos, situados en sus contornos. Los desplazamientos

de estos nodos son las incógnitas fundamentales del problema, tal como ocurre en el análisis simple de estructuras.

3. Se toma un conjunto de funciones que definen de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada elemento en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento.
4. Las funciones de desplazamientos definen entonces de manera única el estado de deformaciones dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales. Estas deformaciones, junto con las deformaciones iniciales y las propiedades constitutivas del material, definen el estado de esfuerzos en todo el elemento y, por consiguiente, también en sus contornos.
5. Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, tal que equilibre las esfuerzos en el contorno y cualesquiera cargas repartidas, resultando así una relación entre fuerzas y desplazamientos en el elemento de la forma $Ka=f$. K se llama *rigidez* del elemento, a son los desplazamientos del elemento y f son las fuerzas que actúan sobre el elemento. Esta relación generalmente está dada en forma matricial.

Una vez alcanzado este punto, el procedimiento para encontrar la solución consiste en una forma de ensamblaje de matrices y vectores que conduce a un sistema de ecuaciones lineales, cuya solución proporciona los desplazamientos en los nodos de los elementos finitos. Conocidos los desplazamientos en los nodos, se puede conocer el campo de desplazamientos y por tanto los esfuerzos en cualquier punto de los elementos.

Es evidente que se han introducido una serie de aproximaciones. En primer lugar, no siempre es fácil asegurar que las funciones de desplazamientos escogidas satisfacen las condiciones de continuidad de los desplazamientos entre elementos adyacentes. Por consiguiente, esta condición de compatibilidad puede no cumplirse en el contorno de los elementos (aunque es evidente que dentro de cada elemento sí se cumplirá, a causa de la unicidad de los desplazamientos implicada en el hecho de que los mismos estén representados por funciones continuas). En segundo lugar, al concentrar las fuerzas equivalentes en los nodos, las condiciones de equilibrio sólo se cumplirán para el conjunto del continuo. Normalmente ocurrirá que tales condiciones no se cumplirán en zonas localizadas dentro y en el contorno de cada elemento.

Se deberá escoger la forma de los elementos y de las funciones de desplazamientos para cada caso particular, dependiendo el grado de aproximación que se requiera. El procedimiento esbozado se conoce como *método de los desplazamientos*.

Hasta aquí, el procedimiento descrito se justifica sólo intuitivamente, pero de hecho lo que se ha sugerido es equivalente a la minimización de la energía potencial total del sistema, siendo la función ésta de un campo de desplazamientos impuestos. Si este campo de desplazamientos se define adecuadamente, deberá producirse convergencia hacia la solución correcta. El proceso es, por consiguiente, equivalente al conocido método de Ritz [14].

El reconocimiento de equivalencias entre el Método de los Elementos Finitos y un proceso de minimización ha sido reciente. Sin embargo Courant en 1943 y Prager y Synge en 1947 propusieron métodos que son en esencia idénticos [15].

Esta generalización de las bases del Método de los Elementos Finitos permite su ampliación a problemas continuos donde sea posible la formulación variacional, y lo cierto es que ya se dispone de procedimientos generales para discretizar mediante elementos finitos

cualquier problema formado por un sistema de ecuaciones diferenciales adecuadamente constituido. En la bibliografía mencionada al principio del capítulo se puede consultar tal generalización.

Formulación directa de las características de un elemento finito

Las “recetas” para deducir las características de un elemento finito de un continuo, que fueron esbozadas en líneas generales, serán presentadas ahora bajo una forma matemática más detallada. Se puede encontrar mucho más sobre esto en las referencias [18,19, 22-24].

Es conveniente obtener los resultados de una forma general aplicable a cualquier situación, pero para evitar la introducción de conceptos más complicados se ilustrarán las expresiones generales con un ejemplo muy sencillo de análisis de una rebanada delgada sometida a esfuerzo plano. Para ello se divide la región en elementos triangulares como se muestra en la Figura 4.1. Se subrayarán las relaciones que tengan carácter general y se empleará notación matricial.

La función de los desplazamientos.

Un elemento finito típico, e , se define por sus nodos i, j, m , etc., y por su contorno formado por líneas rectas. Aproximaremos los desplazamientos u de cualquier punto del elemento mediante un vector columna, \hat{u} :

$$u = \hat{u} = \sum N_i a_i^e = [N_i, N_j, \dots] \left\{ \begin{array}{c} a_i \\ a_j \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\}^e = N a^e \quad (4.1)$$

donde las componentes de N son en general funciones de posición dadas y a^e es un vector formado por los desplazamientos nodales del elemento considerado.

Por ejemplo, en el caso particular de esfuerzo plano,

$$u = \left\{ \begin{array}{c} u(x, y) \\ v(x, y) \end{array} \right\}$$

representa los movimientos horizontal y vertical de un punto cualquiera del elemento y

$$a_i = \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \end{array} \right\}$$

los correspondientes desplazamientos de un nodo i .

Las funciones N_i, N_j, N_m han de escogerse de manera que al sustituir en la Ec. (4.1) las coordenadas de los nodos se obtengan los correspondientes desplazamientos nodales. Evidentemente, en general,

$$N_i(x_i, y_i) = I \quad (\text{matriz unidad})$$

mientras que

$$N_i(x_i, y_i) = N_i(x_m, y_m) = 0, \text{ etc.}$$

son condiciones que cumplen funciones lineales de x e y apropiadas.

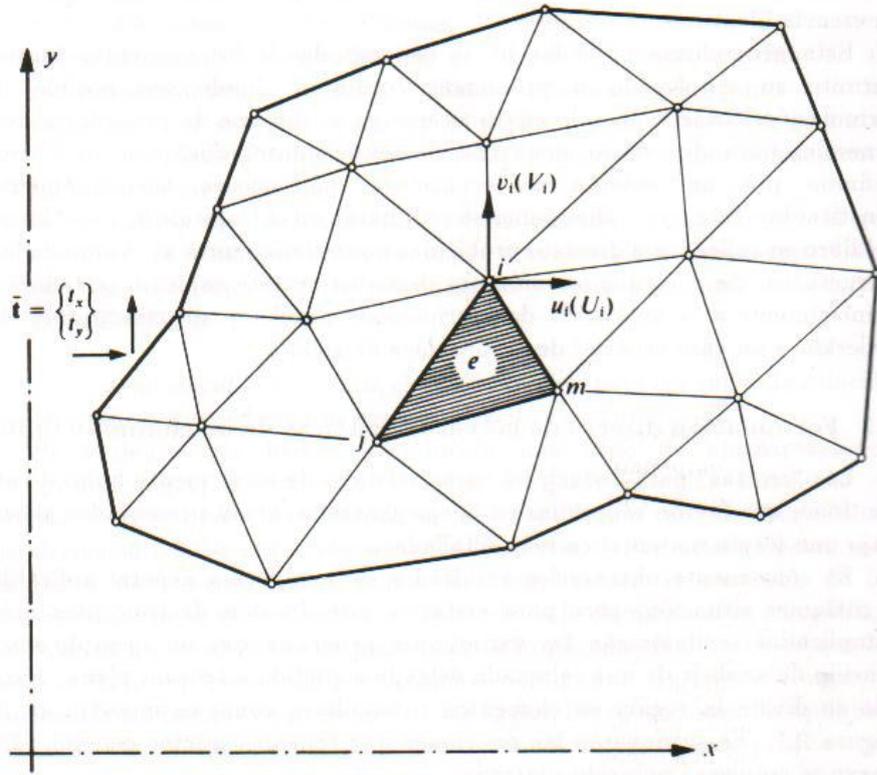


Figura 4.1 Región sometida a esfuerzo plano dividida en elementos finitos.

Si las dos componentes del desplazamiento se interpolan de la misma manera, podremos escribir

$$N_i = N_i I$$

y obtener N_i , de la Ec. (4.1), teniendo en cuenta que $N_i = 1$ para x_i e y_i , y cero en los otros vértices.

La interpolación lineal más evidente en el caso de un triángulo nos dará formas para N_i , como la se muestra en la Figura 4.2.

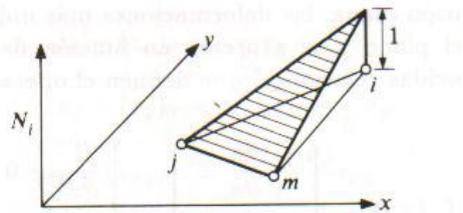


Figura 4.2 Funciones de forma.

Las funciones de prueba N se llaman *funciones de forma*, y éstas juegan un papel decisivo en el análisis por elementos finitos.

Deformaciones.

Una vez conocidos los desplazamientos para todos los puntos del elemento, pueden determinarse las “deformaciones” en cualquier punto. Éstas dan siempre por resultado una relación que puede escribirse en forma matricial

$$\varepsilon = Su \quad (4.2)$$

donde S es un operador lineal apropiado. Mediante la ecuación (4.1), la expresión anterior puede aproximarse como

$$\varepsilon = Ba \quad (4.3)$$

con

$$B = SN \quad (4.4)$$

En el caso de esfuerzo plano, las deformaciones más importantes son las que se producen en el plano y se expresan en función de los desplazamientos mediante las conocidas relaciones que definen el operador S :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}, & 0 \\ 0, & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Determinadas ya las funciones de forma N_i , N_j y N_m , es fácil obtener la matriz B . Si adoptamos una expresión lineal para dichas funciones, las deformaciones serán constantes en todo el elemento.

Esfuerzos

En general, el material contenido dentro del contorno del elemento puede estar sujeto a deformaciones iniciales, tales como las debidas a cambios de temperatura, retracciones, cristalización, etc. Si representamos dichas deformaciones por ε_o , los esfuerzos se deberán a la diferencia entre las deformaciones reales y las iniciales.

Conviene además suponer que al comienzo del análisis el cuerpo puede estar sometido a un sistema conocido de esfuerzos residuales iniciales σ_o , que muy bien puede podrían medirse, pero cuya predicción sería imposible sin un conocimiento completo de la historia del material. Estos esfuerzos pueden sencillamente añadirse a la ecuación general. Así pues, admitiendo un comportamiento elástico lineal del tipo más general, la relación entre esfuerzos y deformaciones será lineal y de la forma

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_o) + \sigma_o \quad (4.5)$$

donde D es una matriz de elasticidad que contiene las propiedades del material apropiadas.

Por otra parte, para el caso particular de esfuerzo plano, hemos de considerar tres componentes de esfuerzo que corresponden con las deformaciones definidas anteriormente. Dichos esfuerzos son

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

y la matriz D se obtendrá sencillamente de la relación usual entre esfuerzos y deformaciones para un medio isótropo

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - (\varepsilon_x)_o &= \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y \\ \varepsilon_y - (\varepsilon_y)_o &= -\frac{\nu}{E} \sigma_x + \frac{1}{E} \sigma_y \\ \gamma_{xy} - (\gamma_{xy})_o &= \frac{2(\nu + 1)}{E} \tau_{xy} \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix}$$

Fuerzas nodales equivalentes

Definamos

$$q^e = \begin{Bmatrix} q_i^e \\ q_j^e \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

como las fuerzas que actúan en los nodos, siendo éstas estáticamente equivalentes a los esfuerzos en el contorno y a las fuerzas distribuidas que actúan sobre el elemento. Cada una de las fuerzas q_i^e debe tener el mismo número de componentes que el desplazamiento nodal a_i correspondiente y debe ordenarse en las direcciones apropiadas.

Las fuerzas distribuidas b son por definición las que actúan por unidad de volumen en direcciones correspondientes a las de los desplazamientos u de ese punto. En el caso particular de esfuerzo plano, las fuerzas nodales son

$$q_i^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}$$

con las componentes U y V en correspondencia con las direcciones de los desplazamientos u y v , y la carga repartida es

$$b = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}$$

en la que b_x y b_y son las componentes de las “fuerza másicas”.

Para establecer la equivalencia estática entre las fuerzas nodales y los esfuerzos actuantes en el contorno y las fuerzas distribuidas, el procedimiento más sencillo es imponer un desplazamiento arbitrario (virtual) a los nodos e igualar el trabajo exterior realizado por las fuerzas nodales al efectuado anteriormente por los esfuerzos y fuerzas distribuidas durante dicho desplazamiento.

Sea δa^e un desplazamiento virtual de los nodos. Éste origina, según las Ecs. (4.1) y (4.2), desplazamientos y deformaciones dentro del elemento iguales, respectivamente, a

$$\delta u = N \delta a^e \quad \text{y} \quad \delta \varepsilon = B \delta a^e \quad (4.6)$$

El trabajo efectuado por las fuerzas nodales es igual a la suma de los productos de las componentes de cada unas de las fuerzas por sus correspondientes desplazamientos, es decir,

$$\delta a^{eT} q^e \quad (4.7)$$

Análogamente, el trabajo interno por unidad de volumen efectuado por los esfuerzos y fuerzas distribuidas es

$$\delta \varepsilon^T \sigma - \delta u^T b \quad (4.8)$$

o

$$\delta a^T (B^T \sigma - N^T b) \quad (4.9)$$

Igualando el trabajo externo con el trabajo interno total obtenido al integrar sobre el volumen del elemento, V^e , se obtiene

$$\delta a^{eT} q^e = \delta a^{eT} \left(\int_{V^e} B^T \sigma d(vol) - \int_{V^e} N^T b d(vol) \right) \quad (4.10)$$

Como esta relación es válida para cualquier desplazamiento virtual, podemos igualar los multiplicandos. Así pues,

$$q^e = \int_{V^e} B^T \sigma d(vol) - \int_{V^e} N^T b d(vol) \quad (4.11)$$

Esta expresión es válida con carácter general, cualesquiera que sean las relaciones entre esfuerzos y deformaciones. En el caso de la ley lineal expresada por la Ec. (4.5), podemos escribir la Ec. (4.11) como

$$q^e = K^e a^e + f^e \quad (4.12)$$

donde

$$K^e = \int_{V^e} B^T D B d(vol) \quad (4.13a)$$

y

$$f^e = - \int_{V^e} N^T b d(vol) - \int_{V^e} B^T D \varepsilon_o d(vol) + \int_{V^e} B^T \sigma_o d(vol) \quad (4.13b)$$

En la última ecuación, los tres términos representan las fuerzas debidas respectivamente a las fuerzas másicas, las deformaciones iniciales y los esfuerzos iniciales. Estas relaciones presentan características similares a las que se obtienen usando los elementos estructurales discretos.

Si los esfuerzos iniciales forman un sistema en equilibrio, como puede ser en el caso de esfuerzos residuales, las fuerzas obtenidas del término correspondiente de la Ec. (4.13b) serán idénticamente nulas tras el ensamblaje. Por consiguiente, con frecuencia se omite la evaluación de dichas fuerzas.

Para el caso particular del elemento triangular bajo esfuerzo plano, estas relaciones se obtendrán con la apropiada sustitución. La matriz B , en este caso, es independiente de las coordenadas, por lo que la integración resultará especialmente sencilla.

La interconexión y solución del conjunto de los elementos sigue los sencillos procedimientos de análisis estructural. En general, podrá haber fuerzas externas concentradas actuando en los nodos y habrá de añadirse al vector

$$r = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

al considerar el equilibrio de los nodos.

Si se especifican los desplazamientos en el contorno, no se suscita problema particular alguno. Sin embargo, supongamos el contorno sometido a una carga exterior \bar{t} distribuida por unidad de superficie. Entonces tendremos que añadir un término adicional a las fuerzas nodales del elemento cuyo contorno posee una superficie A^e . Considerando el trabajo virtual, este término será simplemente

$$- \int_{A^e} N^T \bar{t} d(\text{área}) \quad (4.15)$$

con la integración extendida a la superficie del contorno del elemento. Se advertirá que \bar{t} debe tener el mismo número de componentes que u para que la expresión anterior sea válida.

En la figura 4.1 se muestra dicho elemento de contorno siempre para el caso particular de esfuerzo plano. Las integrales de este tipo no se calculan explícitamente. Con frecuencia, el analista siguiendo una “intuición física”, sustituye la carga que actúa en el contorno por cargas

concentradas en los nodos, calculando éstas directamente mediante consideraciones de estática. En el caso particular considerado, los resultados son idénticos.

Una vez obtenidos los desplazamientos nodales por resolución de las ecuaciones globales del tipo “estructural”, se pueden calcular los esfuerzos en cualquier punto del elemento utilizando las Ecs. (4.3) y (4.5), y obtener

$$\sigma = DBa^e - D\varepsilon_o + \sigma_o \quad (4.16)$$

en la cual se reconocerá inmediatamente los términos típicos que aparecen en la Ec. $\sigma^1 = S^1 a^1 + \sigma_p^1 + \sigma_{\varepsilon_o}^1$, siendo la matriz de esfuerzos del elemento

$$S^e = DB \quad (4.17)$$

A esta expresión hemos de añadir los esfuerzos

$$\sigma_{\varepsilon_o} = -D\varepsilon_o \quad y \quad \sigma_o \quad (4.18)$$

Criterios de convergencia

Las funciones de forma supuestas reducen los infinitos grados de libertad del sistema y es posible que nunca obtengamos el verdadero valor mínimo de la energía, independientemente de lo tupida que sea la malla (subdivisión). Para asegurar la convergencia hacia el resultado correcto han de cumplirse determinadas condiciones. Por ejemplo, es obvio que una función de desplazamientos ha de ser capaz de representar la distribución real de los desplazamientos tan aproximadamente como sea posible. Esto no ocurre cuando las funciones que se hayan elegido sean tales que se produzcan deformaciones en algún elemento cuando éste se someta a los desplazamientos propios de un cuerpo rígido. Así pues, los criterios que una función de desplazamientos deben satisfacer son los siguientes:

Criterio 1. La función de desplazamientos debe elegirse de tal forma que no permita deformaciones de un elemento cuando los desplazamientos nodales se deban a un desplazamiento del conjunto como cuerpo rígido.

Criterio 2. La función de desplazamientos tiene que ser tal que si los desplazamientos nodales son compatibles con un estado de deformación constante se obtenga realmente dicho estado de deformación constante.

Criterio 3. Las funciones de desplazamientos deben elegirse de manera que las deformaciones que se producen en los límites de separación entre elementos sean finitas (aunque puedan ser indeterminadas).

Error de discretización e índice de convergencia

Sea admitido que la aproximación de los desplazamientos representada por la ecuación (4.1) nos proporcionará la solución en el límite, si el tamaño h de los elementos se va haciendo cada

vez más pequeño. Los argumentos para ello son sencillos: puesto que el desarrollo es capaz de reproducir en el límite cualquier distribución de desplazamientos concebible dentro del continuo, y además, como la solución de cada aproximación es única, aquél debe proporcionar en el límite, cuando $h \rightarrow 0$, la solución exacta. Y lo cierto es que en algunos casos, dicha solución exacta puede alcanzarse con un número finito de subdivisiones (o incluso con un solo elemento) si el desarrollo polinómico utilizado para ese elemento puede ajustarse exactamente a la solución correcta. Así, por ejemplo, si la solución exacta es un polinomio de segundo grado y las funciones de forma incluyen todos los polinomios de ese grado, la aproximación nos proporcionará la solución exacta.

Este último argumento puede ayudarnos a determinar el grado de convergencia del método de los elementos finitos, puesto que la solución exacta puede siempre desarrollarse en serie polinómica en las proximidades de cualquier punto (o nodo) i ,

$$u = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i (y - y_i) + \dots$$

si en el interior de un elemento de “tamaño” h se emplea un desarrollo polinómico de grado p , éste podrá ajustarse localmente al desarrollo de Taylor hasta dicho grado y, como x e y son el orden de magnitud de h , el error en u será del orden $O(h^{p+1})$.

Mediante un argumento similar, las deformaciones (o los esfuerzos) que vienen dadas por las derivadas m -ésimas de los desplazamientos, convergerían con un error de $O(h^{p+1-m})$. La energía de deformación que viene dada por el cuadrado de las esfuerzos exhibirá un error de $O(h^{2(p+1-m)})$.

Desde el punto de vista matemático, estos argumentos pueden parecer quizás banalidades “heurísticas”; sin embargo, son ciertos y proporcionan correctamente el grado de convergencia. Frecuentemente se han desarrollado análisis matemáticos mucho más profundos no sólo para determinar el grado de convergencia, sino también para establecer el límite superior del error. Ninguno de ellos ha resultado hasta hoy especialmente útil, ya que generalmente vienen expresados en función de cantidades desconocidas a priori. Más aún, la simple determinación del grado de convergencia basta a menudo para extrapolar la solución hasta el resultado correcto. Tal extrapolación fue introducida originalmente por Richardson [16] y es de gran utilidad si la convergencia es monótona.

El error de discretización no es el único posible en los cálculos por elementos finitos. Además de los errores obvios que se pueden producir cuando se manejan computadoras, los debidos al redondeo son posibles. Como las computadoras operan con números redondeados a un número finito de dígitos, cada vez que tenga lugar una sustracción de dos números “parecidos” se producirá una disminución del grado de precisión. En los procesos de resolución de sistemas de ecuaciones son necesarias muchas sustracciones y la precisión disminuye. También se incluyen aquí los problemas de condicionamiento de la matriz y cuando se emplee el método de los elementos finitos se deberá ser consciente en todo momento de las limitaciones de precisión que impiden alcanzar la solución exacta. Afortunadamente, con las computadoras modernas que admiten un gran número de cifras significativas, estos errores con frecuencia son pequeños.

4.2 Problemas de dinámica de estructuras.

Estos tipos de problemas son dependientes del tiempo, además de tener las variables que intervienen en los problemas estáticos. En este apartado se presentan las ecuaciones fundamentales para la formulación de elementos finitos de los problemas donde el tiempo interviene como variable. Esta sección está basada en la referencia [20].

Ecuación del movimiento.

La ecuación diferencial que describe el movimiento de un sólido en el tiempo puede ser obtenida por varios caminos. Uno de ellos es el principio variacional de Hamilton, cuyo funcional es

$$\Pi_H = \int_{t_1}^{t_2} (E_p - E_c) dt + \int_{t_1}^{t_2} E_d dt \quad (4.19)$$

Donde E_p y E_c son la energía potencial y la energía cinética respectivamente, mientras que E_d es el trabajo correspondiente a las fuerzas de amortiguamiento y a otras fuerzas externas no conservativas. El principio variacional de Hamilton establece que el sistema está en equilibrio dinámico si se cumple

$$\delta \Pi_H = 0 \quad (4.20)$$

en donde δ representa la variación del funcional en el intervalo de tiempo (t_1, t_2) .

Utilizando una discretización en elementos finitos de todo el continuo en una manera análoga a la mencionada en la sección 4.1, para cada elemento de la malla podemos expresar la energía potencial y la energía cinética mediante

$$E_p = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\alpha} dV + \frac{c}{V} \int_V u^T \dot{u} dV \quad E_c = \frac{\rho}{2} \int_V \dot{u}^T \dot{u} dV \quad (4.21)$$

Mediante las ecuaciones 4.1 a 4.5, sustituyéndolas en 4.21 y tras operar, se puede expresar el funcional como

$$\Pi_H = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum \left(\frac{1}{2} \dot{u}_i^T m_i \dot{u}_i - \frac{1}{2} u_i^T c_i \dot{u}_i - \frac{1}{2} u_i^T k_i u_i \right) \right] dt \quad (4.22)$$

con

$$m_i = \rho_i \int_{V_i} N^T N dV \quad c_i = 2 \frac{c_i}{V_i} \int_{V_i} N^T N dV \quad k_i = \int_{V_i} B^T D B dV$$

definidas como las matrices de masa, de amortiguamiento y rigidez del elemento i , respectivamente. Ensamblando las matrices de todos los elementos en la ecuación 4.22 y aplicando el principio variacional de la ecuación 4.20, se tiene

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\delta \dot{U})^T M \dot{U} - (\delta \dot{U})^T C \dot{U} - (\delta \dot{U})^T K U] dt = 0 \quad (4.23)$$

Integrando por partes el primer término de esta ecuación se tiene

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \dot{U})^T M \dot{U} dt = \left| (\delta \dot{U})^T M U \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (\delta U)^T M \ddot{U} dt$$

El primer término del segundo miembro de esta ecuación es cero de acuerdo con el principio de Hamilton, el cual establece que las variaciones δU son cero en los instantes de tiempo t_1 y t_2 . Sustituyendo esta ecuación en 4.23 se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U)^T (-M\dot{U} - C\dot{U} - KU) dt = 0 \quad (4.24)$$

Como la variación δU es arbitraria, la ecuación 4.24 queda finalmente como

$$M\dot{U} + C\dot{U} + KU = 0 \quad (4.25)$$

Esta es la ecuación diferencial que describe el movimiento en el tiempo del sólido. En dicha ecuación tienen que introducirse las condiciones de contorno, lo cual puede hacerse en la misma forma que para el caso estático, eliminando de las matrices las filas y columnas que corresponden a los grados de libertad con desplazamientos, velocidades y aceleraciones nulos. Es posible introducir en 4.25 una excitación dinámica, es decir, un sistema de fuerzas externas dependientes del tiempo, de tal suerte que la ecuación se transforma en

$$M\dot{U} + C\dot{U} + KU = F(t) \quad (4.26)$$

Tales fuerzas pueden tener un origen diverso, como pueden ser acciones sísmicas, presiones de fluidos en movimiento, golpes, etc. En las referencias [19] y [20] se mencionan varios métodos numéricos para la solución en el tiempo de este sistema de ecuaciones, tanto explícitos como implícitos. A la solución del sistema 4.26 se le denomina *respuesta* en el tiempo del sólido, y se puede expresar en desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Calculados los desplazamientos, también se puede obtener la respuesta en deformaciones y esfuerzos del sólido.

Aunque aquí se han tratado sólo problemas elástico-lineales, la ecuación 4.26 es igualmente aplicable a problemas de sólidos no lineales, debiéndose resolver entonces un problema no lineal en cada paso de tiempo. Tales métodos también aparecen en las referencias mencionadas.

4.3 Problemas de mecánica de fluidos.

La mecánica de fluidos es un tema de gran interés en todos los campos de la ingeniería debido a su enorme cantidad de aplicaciones. La técnica de los elementos finitos ha experimentado grandes avances en este tema, a tal grado que en la actualidad es posible resolver problemas de gran complejidad. La variedad de problemas es muy amplia, por lo cual en esta sección sólo se darán las ecuaciones fundamentales que rigen su comportamiento y una pequeña analogía entre las variables de este problema con las de uno de mecánica de sólidos. Las formulaciones de elementos finitos son muy variadas, dependiendo del tipo de problema que se presenten, y no se darán aquí. En las referencias [19] y [21] se puede encontrar mucha más información sobre esto.

Ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos.

Esfuerzos en fluidos.

La característica esencial de un fluido es su incapacidad de resistir esfuerzos tangenciales en reposo. En este caso sólo son posibles “esfuerzos” hidrostáticos, o la presión equivalente. Cualquier análisis debe por tanto concentrarse en el movimiento, y la variable independiente esencial es la velocidad, a la que llamaremos \mathbf{u} . Esta reemplaza la variable de desplazamientos que era de importancia fundamental en mecánica de sólidos. Las velocidades de deformación son, por consiguiente, la primera causa de los esfuerzos σ y se definen de manera análoga a las de una deformación infinitesimal como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = S u \quad (4.27)$$

donde S es un operador análogo al de la ecuación 4.2 usado en mecánica de sólidos para definir la deformación.

Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones para un fluido isotrópico lineal (*newtoniano*) requieren la definición de dos constantes. La primera de ellas relaciona los *esfuerzos desviadores* τ_{ij} con las *velocidades de deformación desviadoras*:

$$\tau_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{ii}}{3} = 2\mu \left(\frac{\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_{ii}}{3} \right) \quad (4.28)$$

Donde δ_{ij} es la delta de Kroneker y los índices repetidos indican suma, de modo que

$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

El coeficiente μ se conoce como *viscosidad de corte* o simplemente viscosidad, y es análogo al módulo de rigidez de cortante G en elasticidad lineal. La segunda relación es entre los cambios en el esfuerzo promedio y la velocidad de deformación volumétrica. Esto define la presión como

$$p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = -\kappa \varepsilon_{ii} + p_0 \quad (4.29)$$

Donde κ es un coeficiente de viscosidad volumétrico análogo al módulo de rigidez volumétrico K en elasticidad lineal, p_0 es la presión hidrostática inicial independiente de la velocidad de deformación, que se definen positivas cuando son de compresión.

Existe poca evidencia de la existencia de la viscosidad volumétrica, por lo que se tomará igual a cero, por lo que la relación constitutiva para fluidos viene dada por

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{\delta_{ij} \varepsilon_{ii}}{3} \right) - \delta_{ij} p = \tau_{ij} - \delta_{ij} p \quad (4.30)$$

Se ha suprimido el subíndice de la presión al no ser ya necesario. En la relación anterior no es necesario implicar que el fluido sea incompresible ($\varepsilon_{ii}=0$).

Se puede presentar no linealidad en fluidos cuando la viscosidad depende de la velocidad de deformación. Dichos fluidos se denominan *no-newtonianos*.

Ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes.

De la mecánica del medio continuo, se tienen los principios de *conservación de la masa*, *conservación del movimiento* y *conservación de la energía*. De acuerdo con la referencia [21], estos principios básicos pueden escribirse en la forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla F + \nabla G + Q = 0 \quad (4.31a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial G_i}{\partial x_i} + Q = 0 \quad (4.31b)$$

con

$$U = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{Bmatrix} \quad E = e + \frac{u_i u_i}{2}, \quad e \text{ la energía intrínseca por unidad de masa.}$$

$$F = \begin{Bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + p \delta_{1i} \\ \rho u_2 u_i + p \delta_{2i} \\ \rho u_3 u_i + p \delta_{3i} \\ \rho H u_i \end{Bmatrix} \quad H = E + \frac{p}{\rho}, \quad H \text{ la entalpía}$$

$$G = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{1i} \\ -\tau_{2i} \\ -\tau_{3i} \\ \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} u_i) - k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] \end{Bmatrix} \quad T \text{ la temperatura, } k \text{ el coeficiente de conductividad térmica}$$

$$Q = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho f_1 \\ -\rho f_2 \\ -\rho f_3 \\ -\rho f_i u_i - q_H \end{Bmatrix} \quad q_H \text{ es la fuente de calor por unidad de volumen, y } \rho f \text{ son fuerzas másicas.}$$

Este sistema de ecuaciones se conoce con el nombre de *ecuaciones de Navier-Stokes*, y en el caso particular de fluido sin viscosidad y sin conducción de calor, como *ecuaciones de Euler*. Estas ecuaciones son el punto de partida para todos los estudios de la mecánica de fluidos, y en la literatura se presentan de muchas formas alternativas.

Para fluidos incompresibles, las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \boldsymbol{\sigma}(p, \mathbf{u}) &= -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) &= ((\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T)/2. \end{aligned} \tag{4.31c}$$

Dependiendo de las condiciones iniciales y de contorno del fluido, de la velocidad del flujo y varios otros factores, la variedad de problemas de fluidos se extiende ampliamente. En cada una de esas variantes se presentan dificultades numéricas y/o problemas de inestabilidad, y los métodos necesarios para la solución de tales problemas están fuera del alcance de este trabajo. En las referencias citadas (y en la literatura de fluidos en general) se puede encontrar mayor información sobre todos los aspectos que involucran la solución de estos problemas con el método de elementos finitos.

Al igual que en los problemas de dinámica de estructuras, los problemas de fluidos son dependientes del tiempo, por lo que su solución se expresa a través de varios pasos de tiempo.

4.4 Interacción fluido-estructura.

En muchos problemas de ingeniería (o en fenómenos naturales) se tienen dos o más sistemas físicos que interactúan uno con otro de tal forma que es imposible obtener la solución independiente de cualquiera de los sistemas sin la solución simultánea de los demás. Tales sistemas se conocen como acoplados, y tal acoplamiento puede ser fuerte o débil dependiendo del grado de interacción.

Uno de los problemas más obvios de este tipo es el de interacción dinámica fluido-estructura. Como se había mencionado anteriormente, una estructura puede estar sometida a cargas dinámicas generadas por la presión de fluidos en movimiento, por ejemplo el viento o el agua. Para conocer tales cargas, se puede utilizar el método de elementos finitos para resolver el problema de flujo y así conocer las presiones del fluido sobre la estructura. Por efecto de tales fuerzas, la estructura tendrá deformaciones. Sin embargo, la estructura forma parte de las condiciones de contorno del fluido, y al deformarse, éstas cambiarán. Es fácil darse cuenta que la solución debe realizarse en forma simultánea, empleando pequeños pasos de tiempo para poder capturar correctamente la solución.

Estos problemas son bastante complicados, al grado que sigue siendo un tema abierto a la investigación. Las referencias [25] y [26] tratan sobre soluciones recientes a este tipo de problemas. En este trabajo se empleó una implementación desarrollada para el trabajo de tesis doctoral de Gerardo Valdes en el CIMNE de la Universidad Politécnica de Cataluña, cuya publicación está en proceso.

En dicho trabajo se utiliza el método de pasos fraccionados [27] para la solución del problema acoplado, utilizando una formulación Lagrangiana-Euleriana arbitraria (ALE) [28] y un método de interpolación para poder realizar el acoplamiento de los sistemas.

La implementación mencionada se utilizó en este trabajo sólo como un “evaluador” de la función objetivo y restricciones de una aplicación que se describirá en el Capítulo 5, a manera de “caja negra”, por lo que no se abundará más sobre el tema aquí.

Para la solución de un problema se necesitan dos mallas de elementos finitos, una para el dominio del fluido y otra para el dominio del sólido, cada una con sus respectivas condiciones de contorno, y las características físicas de los medios que intervienen en el sistema. El programa precisa indicar explícitamente cuál es la zona o zonas donde ocurre el acoplamiento entre los dos problemas. El esquema de solución utilizado es el siguiente:

Dado un tamaño de paso de tiempo y el tiempo de análisis de la simulación (es decir, el número de pasos de tiempo a utilizar), emplear unos cuantos pasos de tiempo iniciales para resolver únicamente el problema del fluido para lograr su estabilización, y entonces:

- Calcular las velocidades y las presiones en el fluido, dando algunas iteraciones para mayor precisión, y transmitir las presiones en la zona de acoplamiento al *solver* del sólido.
- Con las presiones obtenidas, calcular las deformaciones y esfuerzos en el sólido, haciendo algunas iteraciones internas hasta lograr una precisión adecuada.
- Con las deformaciones calculadas, *modificar* las mallas de elementos finitos de ambos sistemas para ajustar las condiciones de contorno del fluido, así como para evitar inestabilidad numérica de la solución.
- Repetir este proceso hasta completar los pasos de tiempo deseados.

Como se podrá entender, este esquema de solución resulta computacionalmente muy costoso, pues en cada paso de tiempo se requiere resolver varias veces un sistema de ecuaciones cuyo tamaño dependerá del número de nodos que tengan las mallas de elementos finitos. Es evidente que entre más finas sean las mallas empleadas, mejor será la solución obtenida, aunque también será más cara. El costo computacional también dependerá del número de pasos de tiempo utilizados.

CAPÍTULO 5

Aplicaciones.

Una vez expuestos los principios teóricos en que se basa este trabajo, damos paso al desarrollo de las aplicaciones. Como se había mencionado en el Capítulo 1, la primera de las aplicaciones es la optimización de estructuras metálicas, y la segunda trata sobre la optimización de una lámina metálica sujeta a cargas dinámicas producidas por el paso de un fluido. Es en esta aplicación donde se utiliza el Método de los Elementos Finitos para la evaluación de las restricciones, por lo que el problema resulta computacionalmente muy costoso. Es por ello que la mayor parte de los experimentos se realizaron con la aplicación de estructuras metálicas, que aunque no es un problema barato, tiene un costo computacional mucho menor al otro problema.

5.1 Optimización de armaduras metálicas. EDA's vs EE's.

Como se había mencionado en el capítulo 1, las armaduras son estructuras cuyos miembros están sujetos únicamente a carga axial, es decir, sólo trabajan a tensión o compresión pura. Casi todas se fabrican en acero, por lo que dichas estructuras pueden soportar cargas muy grandes en comparación con su peso propio. Se utilizan sobre todo en construcciones que requieren salvar grandes claros (espacios libres de apoyos intermedios), como lo son naves industriales, puentes de gran claro, cubiertas ligeras, etc. En la Figura 5.1 se muestran algunas de las aplicaciones mencionadas.



Figura 5.1 Aplicaciones de las armaduras.
a) El Poliforum de León, México. b) Puente ferroviario de gran claro.

Cuando se diseña una armadura, el primer paso es elegir su geometría. Al hacer esto, muy pocas veces se piensa en optimizar el diseño de la forma de la armadura siguiendo criterios estructurales. Generalmente la geometría de la armadura está regida por cuestiones estéticas y de facilidad de fabricación y montaje. Hay un solo criterio de tipo estructural al elegir la geometría de una armadura, y tiene que ver con la longitud máxima de sus miembros individuales. Un miembro en compresión fallará primordialmente por pandeo [29], no por aplastamiento. Entre más largo sea un miembro sujeto a compresión, mayor será su susceptibilidad al pandeo y por lo tanto será mucho menor la carga que puede resistir. Por eso

mismo, se procura que una armadura esté formada por elementos de corta longitud. En la Figura 5.2 se muestran algunos tipos de geometrías comúnmente usadas.

Una vez definida la geometría, el siguiente paso en el diseño de la armadura es la elección del tipo de elementos estructurales que se utilizarán al fabricarla. Los fabricantes de perfiles de acero estructural no hacen perfiles “a la medida”, salvo casos muy excepcionales. Lo que hacen es fabricar una serie de perfiles con formas y medidas predeterminadas, y cuentan con catálogos de los productos que fabrican (ver Figura 5.3). Entonces, al hacer el diseño estructural de la armadura, lo que se trata es elegir un perfil del catálogo para cada elemento estructural, de modo que se satisfagan los requisitos de seguridad y funcionalidad de la armadura.

Es aquí donde entra el problema de optimización. Debido a que el costo de la armadura estará en función de la cantidad de material utilizado para fabricarla, se trata entonces de que la estructura sea lo más ligera posible siempre y cuando se cumplan los requisitos de seguridad estructural. Estos requisitos son:

- Que todos los elementos estructurales puedan resistir la carga máxima a que la estructura estará sometida. A esto lo llamaremos *restricción de esfuerzos*. Esta condición es esencial, pues si uno o más elementos llegan a fallar, la estructura puede colapsarse.
- Que la estructura no sufra deformaciones importantes bajo la carga a la cual estará sometida regularmente durante su funcionamiento, o mejor dicho, bajo cargas de servicio. A esta condición la llamaremos *restricción de desplazamientos*. Esta condición se debe a varias cosas, como ejemplo puede decirse que si una estructura se deforma en exceso (sin que ello implique la falla de la misma), puede dañar elementos no estructurales adosados a ella, como vidrios e instalaciones.

Por lo tanto, la optimización de una armadura consiste en elegir la combinación de perfiles estructurales de un cierto catálogo tal que el peso total de la estructura sea mínimo, cumpliendo las restricciones de esfuerzos en las barras y de desplazamientos.

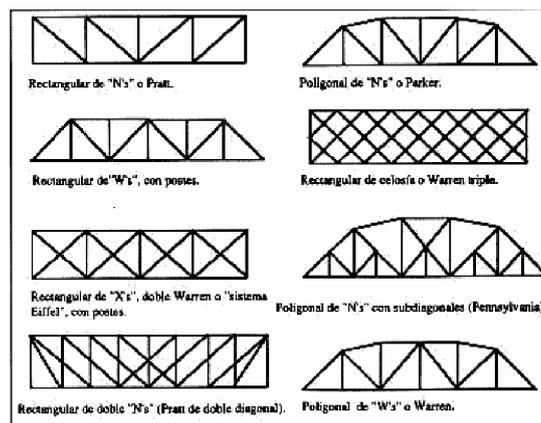


Figura 5.2. Tipos de geometrías comunes para armaduras.

Existen dos criterios de diseño de estructuras, a saber: los métodos elásticos y los métodos plásticos. Basados en unos y otros métodos, existen varios reglamentos de diseño estructural, los cuales presentan ligeras variaciones de un país a otro. El tratado de estas teorías y métodos se sale de los objetivos de la tesis, y su desarrollo no figura aquí. En la aplicación específica que se manejó en este trabajo, se utilizó el reglamento de diseño LRFD del American Institute of Steel Construction (*Load and Resistance Factor Design*) [30]. Este es un método de diseño

plástico de amplio uso en el continente americano, y revisa los esfuerzos en los elementos estructurales bajo varias combinaciones de carga última, es decir, la carga máxima a la que se espera la estructura pudiera estar sometida en algún momento de su vida útil. Además, para la revisión por deformaciones, la estructura debe ser analizada bajo cargas de servicio.

La carga última está formada por la combinación de una o más cargas de diferente tipo, afectadas por un factor de amplificación. Entre las cargas que se utilizan para el análisis figuran las *cargas muertas* (aquellas debidas al peso propio de la estructura y elementos fijos a ella), las *cargas vivas* (aquellas que se deben al uso común de la estructura), y las *cargas accidentales* (debidas a acciones poco frecuentes como sismos y viento). Para los efectos de este trabajo, se utilizarán dos combinaciones de carga última que figuran en el reglamento LRFD

$$U_1 = 1.4D$$

$$U_2 = 1.2D + 1.6L$$

Donde U es la carga última, D es la carga muerta y L es la carga viva. Para la revisión por cargas de servicio, la combinación es

$$S = D + L$$

En las armaduras, las cargas deben ser aplicadas sobre las intersecciones de los elementos, llamados *nodos*, para que se cumpla la hipótesis de que los elementos trabajan solamente bajo carga axial. Entonces, los desplazamientos máximos de una armadura ocurrirán siempre en los nodos. En las referencias [29] y [30] figuran las fórmulas y los criterios de diseño del reglamento LRFD que fueron utilizados para el análisis de las armaduras en este trabajo.



Medida	Peso		Area A in ²	Peralte		Patín		Alma tw in
	lb/ft	kg/m		b in	d in	tf in	tw in	
W6 (6 X 4)	9.0	13.392	2.68	5.90	3.940	0.215	0.170	
	12.0	17.856	3.55	6.03	4.000	0.280	0.230	
	16.0	23.808	4.74	6.28	4.030	0.405	0.260	
W8 (8X4)	10.0	14.880	2.96	7.89	3.940	0.205	0.170	
	13.0	19.344	3.84	7.99	4.000	0.255	0.230	
	15.0	22.320	4.44	8.11	4.015	0.315	0.245	
W8 (8X5 1/4)	18.0	26.784	5.26	8.14	5.250	0.330	0.230	
	21.0	31.248	6.16	8.28	5.270	0.400	0.250	

Figura 5.3 Diferentes perfiles estructurales de acero. Ejemplo de un catálogo de perfiles.

De toda la exposición anterior, resulta entonces que la optimización de estructuras metálicas es un problema de optimización combinatoria con restricciones, cuyo grado de dificultad dependerá de la geometría de la estructura y del número de perfiles que haya en el catálogo utilizado. En la práctica se procura que en la fabricación de las armaduras se use un número reducido de perfiles de acero distintos, tanto por estética como por razones de facilidad constructiva (y ello se traduce indirectamente en un menor costo). Para efectos de este trabajo, ello equivale a reducir sensiblemente el espacio de búsqueda del problema, pues lo que cuenta es el número de secciones diferentes que *puede* haber en la estructura, no tanto el número de barras.

5.1.1 Estructura de 5 barras y 3 secciones diferentes.

En la Figura 5.5 se muestra la geometría y las cargas de este ejemplo (longitudes en metros). La armadura tiene 5 barras, pero sólo 3 secciones son diferentes, junto a las barras aparecen números que indican cuáles tendrán el mismo tipo de perfil de acero. Las barras diagonales no se intersecan entre ellas, sólo se cruzan pero no están conectadas en realidad. La estructura se analizó bajo las 2 condiciones de carga última mencionada antes para esfuerzos, y bajo carga de servicio para desplazamientos. El desplazamiento máximo admisible bajo condiciones de servicio es de 1cm en cualquier nodo de la armadura. Se supuso acero ASTM-A-500-C de alta resistencia, el cual tiene un límite de fluencia de 3500kg/cm^2 . Para la solución, se empleó un catálogo de 32 perfiles de acero distintos, el cual aparece completo en el Anexo. Por lo tanto, el espacio de búsqueda tiene $32^3=32768$ combinaciones diferentes, resultando posible realizar una búsqueda exhaustiva.

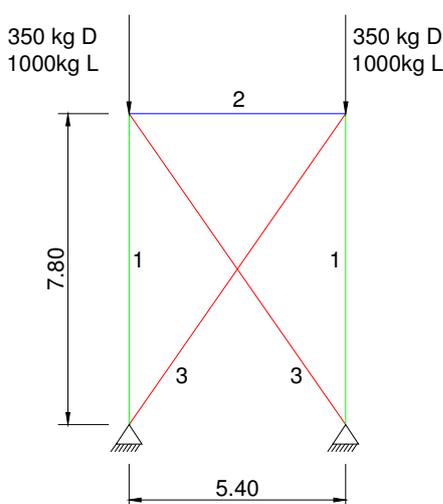


Figura 5.5 Geometría y cargas de la armadura de 5 barras.

El ejemplo se resolvió con las dos estrategias de solución, utilizándose los siguientes parámetros para el EDA (PBIL):

- Tamaño de población: 50 individuos.
- Tamaño de muestra: 30 individuos, 60% de ellos factibles y 40% no factibles.
- Alfa: 0.9 (parámetro de aprendizaje).
- 30 generaciones.
- Elitismo de los 5 mejores individuos factibles.

Para la estrategia evolutiva con ranqueo estocástico, los parámetros fueron los siguientes:

- 20 μ padres y 45 λ hijos.
- Sigmas para mutación: 5 máxima, 1 mínima.
- Recombinación panmítica discreta, para variables de control y variables objetivo.
- Parámetro de ranqueo estocástico: 0.45.
- 30 generaciones.

Ambos algoritmos fueron puestos a competir prácticamente en igualdad de circunstancias, pues cada uno realizó poco más de 1350 evaluaciones de la función objetivo, lo que representa poco más del 4% del espacio de búsqueda. Para cada algoritmo, se ejecutó una serie de 30 repeticiones a fin de poder hacer una comparación estadística entre ambos. Cada una de esas

pruebas se llevó aproximadamente 20 segundos en tiempo de cómputo. Los resultados se resumen en la Tabla 5.1.

	PBIL	EE con SR
Mejor	230.6260	230.6260
Peor	274.7250	233.2180
Media	240.1260	230.7124
Std D	12.8855	0.4653
Mediana	233.2180	230.6260
Exitos	12 de 30	29 de 30

Tabla 5.1 Resultados para el problema de 5 barras.

El renglón correspondiente a éxitos se refiere al número de veces que cada algoritmo encontró el óptimo global, el cual es conocido ya que se hizo una búsqueda exhaustiva previa. En estos resultados, se observa claramente que la estrategia evolutiva con ranqueo estocástico supera al PBIL en todos los aspectos. Para este ejemplo tan sencillo no se realizó un análisis más profundo, se prefirió hacerlo para el siguiente ejemplo, el cual es bastante más difícil.

5.1.2 Estructura de 10 barras.

En la Figura 5.6 se muestra la geometría y cargas para este problema (las longitudes están en metros). Al igual que en el ejemplo anterior, las barras diagonales no se intersecan entre sí. La estructura se analizó bajo las mismas 2 combinaciones de carga última para esfuerzos, y bajo carga de servicio para desplazamientos. El desplazamiento máximo admisible bajo condiciones de servicio es de 1cm en cualquier nodo de la armadura. Se supuso el mismo acero ASTM-A-500-C de alta resistencia del ejemplo anterior ($F_y=3500\text{kg/cm}^2$), y se empleó el mismo catálogo de 32 perfiles de acero del Anexo. Todas las barras pueden ser diferentes, por lo que se tienen 32^{10} combinaciones diferentes (aproximadamente 1.1259×10^{15}). Para este ejemplo no es posible hacer una búsqueda exhaustiva, por lo que el óptimo global es desconocido. Además, dada la naturaleza del problema, es de esperarse que se tengan muchos mínimos locales, lo que hace que el problema sea bastante difícil de resolver.

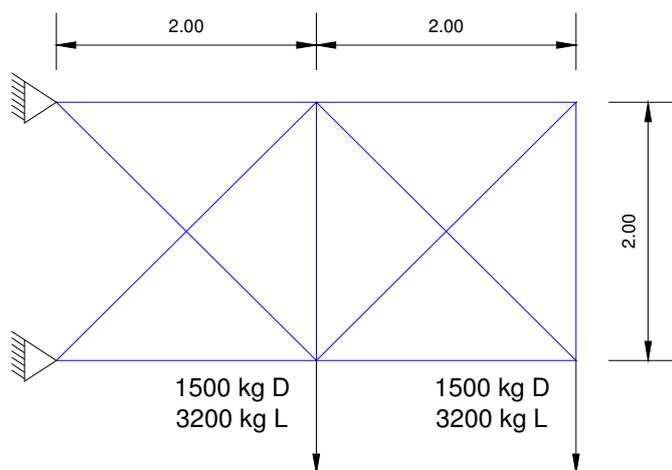


Figura 5.6 Geometría y cargas para la estructura de 10 barras.

El ejemplo también se resolvió con los dos algoritmos, utilizándose los siguientes parámetros para el PBIL:

- Tamaño de población: 100 individuos.
- Tamaño de muestra: 50 individuos, 60% de ellos factibles y 40% no factibles.
- Alfa: 0.9 (parámetro de aprendizaje).
- 250 generaciones.
- Elitismo de los 15 mejores individuos factibles.

Y para la estrategia evolutiva se utilizaron los siguientes parámetros:

- 50 μ padres y 100 λ hijos.
- Sigmas para mutación: 5 máxima, 1 mínima.
- Recombinación panmítica discreta, para variables de control y variables objetivo.
- Parámetro de ranqueo estocástico: 0.45.
- 250 generaciones.

A raíz de los resultados previos, se utilizó también una modificación del algoritmo PBIL, consistente en agregar pequeñas mutaciones normales a las variables con media cero y varianza unitaria, y la más importante que consistió en recortar el espacio de búsqueda de las variables cuando no se logra mejora en un cierto número de generaciones. El recorte se hace asignando probabilidad cero a aquellos valores de las variables que presenten una probabilidad que esté por debajo de un cierto umbral de la probabilidad uniforme, y posteriormente normalizando la distribución de probabilidad para mantener la condición de que la suma de las probabilidades sea uno. Para este PBIL modificado, se aplicó dicho recorte si no se lograba una mejora al cabo de 15 generaciones, utilizándose un umbral de 0.1 veces el valor de la probabilidad uniforme. Se ejecutó también una serie de 30 repeticiones para cada algoritmo, consumiendo cada una de las pruebas un tiempo aproximado de 1.5 minutos. Los resultados obtenidos aparecen en la Tabla 5.2.

	EE con SR	PBIL	PBIL modificado
Mejor	82.2739	82.2739	82.2739
Peor	83.8515	91.0391	88.7972
Media	82.6150	84.6480	83.8071
Std D	0.4869	2.4644	2.0008
Mediana	82.2739	83.9165	82.7715
Exitos	18 de 30	4 de 30	12 de 30

Tabla 5.2 Resultados para el problema de la estructura de 10 barras.

El renglón de éxitos de la Tabla 5.2 se refiere al número de veces que cada algoritmo llegó a la mejor solución encontrada para este problema, de un total de 30 intentos. Una vez más se observa que la estrategia evolutiva tiene un mejor funcionamiento para este problema. La modificación introducida en el PBIL mejoró sustancialmente su desempeño, pero los resultados siguen siendo inferiores a los obtenidos por la estrategia evolutiva. En la Figura 5.7 se muestran gráficas del comportamiento para cada uno de los algoritmos, obtenidas de repeticiones donde se encontró la mejor solución.

En dichas gráficas se observan comportamientos diferentes para cada algoritmo, tanto en el valor de aptitud del mejor como en la aptitud promedio de la población. La estrategia evolutiva presenta cambios pequeños pero graduales en la aptitud promedio, y un comportamiento suave en la aptitud promedio de la población, casi convergente. El PBIL simple presenta cambios grandes y bruscos en la aptitud del mejor, con grandes intervalos de estancamiento, y un comportamiento un tanto errático de la aptitud promedio de la población, quedándose oscilando

en un rango de valores muy por encima de la aptitud mejor, sin converger. El comportamiento del PBIL modificado es mucho más parecido al de la estrategia evolutiva, con ligeras variaciones en la aptitud promedio de la población.

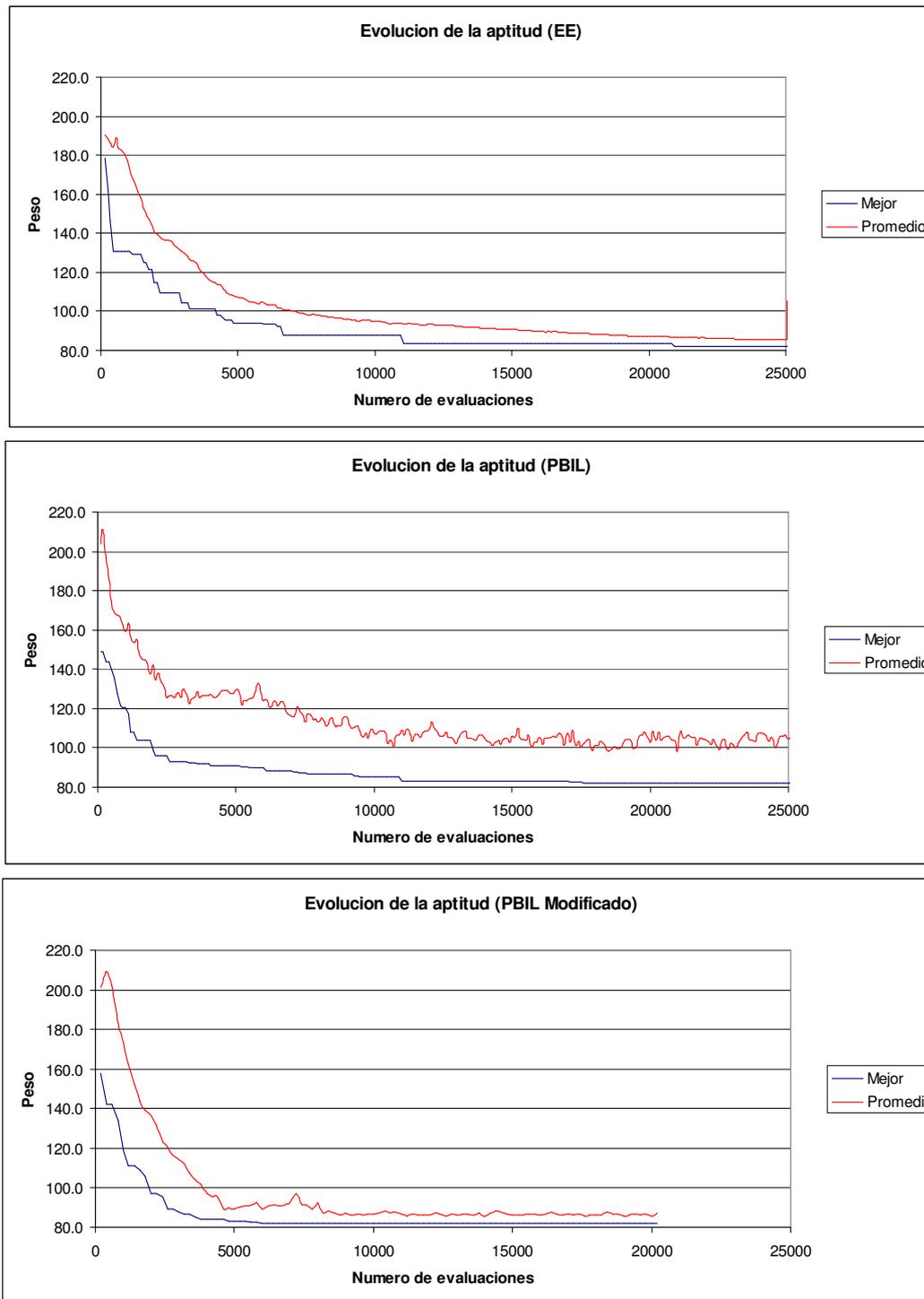


Figura 5.7 Gráficas de comportamiento evolutivo para los 3 algoritmos en el problema de la Estructura de 10 barras.

Adicionalmente, para todos los algoritmos se agregó un archivo que iba registrando todos los individuos distintos que se iban presentando en cada repetición, de tal modo que en la lista final se tenían todos los individuos diferentes que se habían generado en cada prueba, sin que hubiera dos iguales. Para ello, cada vez que un individuo se generaba, se buscaba si había uno

igual en el archivo, y sólo se agregaba al final de la lista en caso de no haberse encontrado ninguno igual. Mediante este mecanismo, se pudo comprobar que el PBIL era el que generaba la mayor cantidad de individuos distintos entre sí, logrando una mayor exploración del espacio de búsqueda. La cuestión es que, a pesar de tener una mayor exploración, no parece hacerla por las zonas más promisorias al encontrar en un menor número de veces la mejor solución conocida.

Hasta este punto, los EDA's no parecen ser una buena alternativa para resolver esta clase de problemas. En experimentos que por razones de espacio no se reportan aquí, se probaron EDA's que consideraban dependencias en sus modelos probabilísticos, y los resultados no fueron mejores a los logrados por el PBIL simple, inclusive utilizando codificación binaria para las variables, que es la codificación que se utiliza en casi todos los artículos que figuran en la literatura sobre EDA's.

Una observación importante sobre el comportamiento del EDA es que rápidamente se mueve hacia una zona cercana al óptimo, pero después le resulta sumamente difícil escapar de mínimos locales. Es por ello que la aptitud mejor se estanca durante lapsos grandes, y los mecanismos de dispersión se activan continuamente al presentar alta convergencia hacia ciertos valores, por ello se genera una gran diversidad de individuos pero no ayudan a encontrar una mejor solución.

5.2 Un problema de interacción fluido-estructura. Optimización mediante estrategias evolutivas.

Se presenta ahora un problema de con un elevado costo de evaluación computacional, como se mencionó en el Capítulo 1. Este ejemplo es de tipo académico, y la gran mayoría de los datos que fueron utilizados en su solución también lo son, por lo que dichos valores no pueden ser de ninguna manera considerados como reales. El problema consiste en la minimización del peso de una membrana que está sujeta a cargas dinámicas originadas por el paso de un fluido a través de un conducto cerrado. En la figura 5.8 se muestra la geometría del problema.

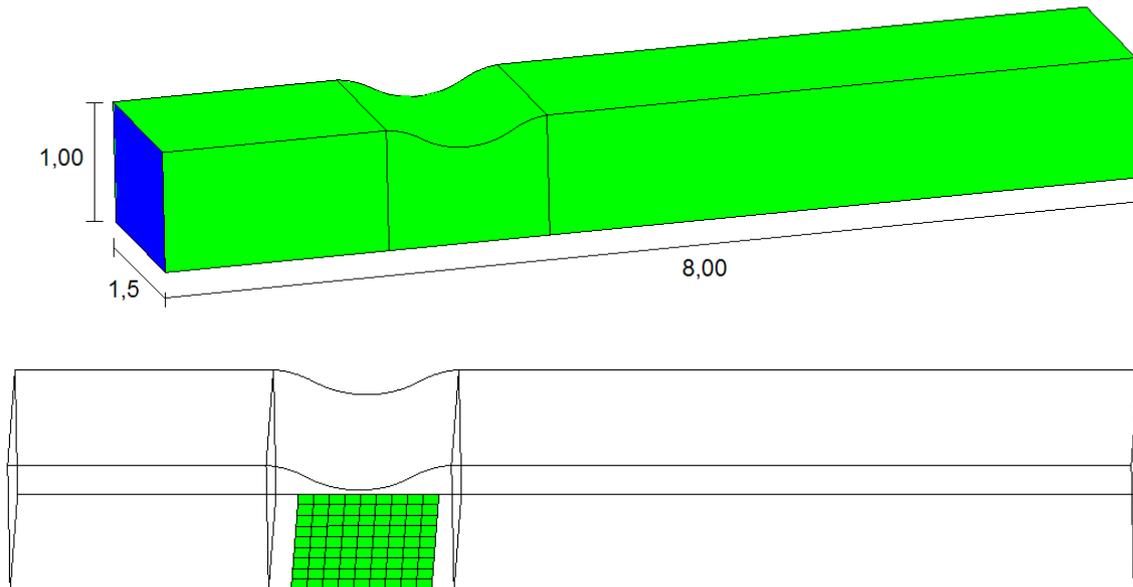


Figura 5.8. Geometría y dimensiones del problema. Longitudes en metros.

Por la parte frontal del conducto entra un fluido con velocidad constante y uniforme, y circula por él hasta salir por el otro extremo. Todas las paredes del conducto se consideran rígidas, con excepción de la parte correspondiente a la membrana. Las condiciones de frontera del fluido son velocidad cero en las paredes, además de la velocidad constante a la entrada y presión cero a la salida. La lámina está ubicada justo en una zona donde la geometría del conducto tiene un cambio en su sección, lo que provoca un aumento en la velocidad del fluido al pasar por ahí, y ello conlleva una disminución de la presión en esa parte. Debido a dicho cambio de presión, la membrana se deformará, con lo cual habrá un nuevo cambio en la sección del conducto, y así sucesivamente en el tiempo. Resulta entonces un problema dinámico de un fluido que interactúa con un sólido deformable. Para resolver este problema, se hace uso del método de elementos finitos, con un esquema de solución para problemas acoplados, como se explicó muy brevemente en el Capítulo 4. La simulación numérica del sistema es por sí sola un problema muy difícil y costoso de resolver, aún cuando el sólido se trabaja como un material elástico lineal.

La lámina está dividida en 5 secciones concéntricas (Figura 5.9). Las variables de diseño son los espesores de cada una de las secciones de la lámina. Las restricciones del problema de optimización son un esfuerzo máximo admisible y un desplazamiento máximo admisible para cualquier instante de tiempo. Esto es, en ningún caso se admitirá un esfuerzo ni un desplazamiento mayor a un límite dado. Debido a que este problema es de tipo dinámico, se vuelve importantísima la determinación del tamaño de paso de tiempo para la simulación

numérica del sistema, así como el tiempo de análisis de la simulación. Un paso de tiempo muy pequeño dará una descripción muy precisa del comportamiento del sistema, pero tendrá un costo computacional muy elevado. Un paso de tiempo grande tendrá un costo computacional más bajo, pero la solución obtenida será muy burda y se corre el riesgo de no poder capturarla con suficiente precisión. El tiempo de análisis requerido se refiere al tiempo que el sistema tarda en estabilizarse, esto es, cuando la solución se vuelve estacionaria.

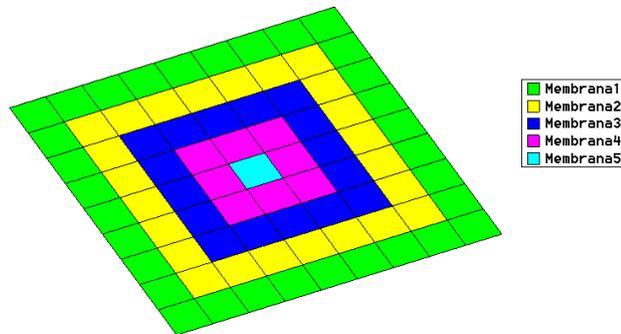


Figura 5.9. Secciones en que se divide la lámina a optimizar.

Aunque en la literatura figuran varias reglas prácticas para determinar el tamaño de paso adecuado para cada problema, en este caso se tiene la desventaja de que, al variar el espesor de la membrana, cambiará su rigidez y por lo tanto sus modos de vibración, y ello hace que el tamaño de paso adecuado para cada caso pueda ser muy diferente. Entrar en el tema de tratar de determinar en forma automática el tamaño de paso adecuado para cada caso es un problema que queda completamente fuera del alcance de la tesis. Más aún cuando el problema se intenta resolver con herramientas que no requieren un conocimiento *a priori* del problema, como son los algoritmos evolutivos. En este caso, el tamaño de paso se determinó manualmente, ejecutando algunos ejemplos en forma separada (antes de meterlos al algoritmo evolutivo) y observando los resultados que se tenían para distintos tamaños de paso.

Los datos para el problema acoplado son los siguientes:

- Velocidad de entrada del fluido: 0.5 m/s. Presión cero a la salida.
- Viscosidad del fluido: 1.0×10^{-4} kg/m*s
- Densidad del fluido: 1.17 kg/m³
- Módulo elástico de la membrana $E=7.0 \times 10^8$ Pa.
- Densidad de la membrana: 2700 kg/m³. Modulo Poisson:0.33
- Tiempo de análisis: 0.35 segundos.
- Paso de tiempo: 0.01 segundos.
- Tiempo antes del acoplamiento: 0.05 segundos. Durante este periodo de tiempo inicial, no se calcula ningún acoplamiento para dejar que la solución del fluido se estabilice.

Los datos para el diseño de la membrana son estos:

- Espesor máximo: 0.1mm. Espesor mínimo: 0.01mm
- Desplazamiento máximo admisible: 0.0035m
- Esfuerzo Von Mises máximo admisible: 30000 kg/m²

En la Figura 5.10 se muestran las mallas de elementos finitos utilizadas para este problema, tanto para la solución del fluido como para el sólido. La malla para el fluido consta de 34757 elementos tetraédricos de 4 nodos, teniéndose 7072 nodos en total. Para la lámina, la malla tiene 1296 elementos triangulares de tres nodos tipo membrana, con 685 nodos en total.

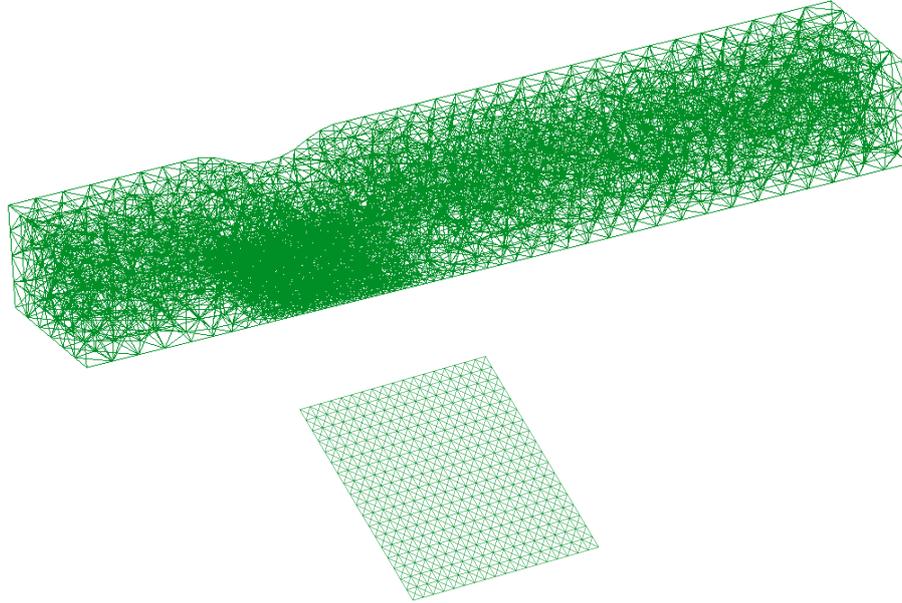


Figura 5.10 Mallas de elementos finitos utilizadas para el fluido y para el sólido.

Debido a que los datos del ejemplo no son del todo reales, hubo que hacer varios experimentos previos con el problema para determinar los valores adecuados de los parámetros, sobre todo los concernientes al tamaño de paso y tiempo de análisis, así como los espesores máximo y mínimo de la membrana y los valores del desplazamiento y esfuerzo máximo admisible, de tal suerte que para el espesor máximo de la membrana se tuviese una solución factible, y que la membrana más delgada posible no lo fuera. Las gráficas que aparecen en la Figura 5.11 muestran los resultados de algunas de las simulaciones previas, variándose tanto el espesor de la membrana, como el tamaño del paso de tiempo y el tiempo de análisis. En dichas gráficas se muestra el valor del desplazamiento total (valor absoluto) del punto central de la membrana, el cual por lógica debe ser el punto de mayor desplazamiento. Los pasos de tiempo iniciales tienen un desplazamiento de cero, ello se debe al tiempo que se deja pasar antes de iniciar el acoplamiento del fluido con el sólido para dejar que la solución en el fluido se estabilice un poco.

Como puede verse en dichas gráficas, los resultados son de tipos muy diversos. Algunos tienen una solución estacionaria constante, mientras que en otros casos la membrana se mantiene vibrando. La parte a) de la figura corresponde a una membrana con espesor uniforme de 0.1mm, empleando un tamaño de paso de 0.01 segundos. En la parte b) el espesor de la lámina es de 1mm, con el mismo tamaño de paso que para la parte a). En la parte c) el espesor es de 0.01mm para el mismo tamaño de paso, mientras que en la parte d) el espesor es igual que en c) pero con un tamaño de paso de 0.005 segundos. En todos los casos el tiempo de análisis fue de 0.35 segundos. Fue necesario hacer muchos ensayos más, que por razones de brevedad no se muestran aquí. En base a los resultados arrojados por todas las pruebas fue como se determinaron los parámetros del problema ya mencionados.

En la Figura 5.12 se muestran resultados de desplazamientos y esfuerzos en un instante de tiempo, correspondientes a la membrana de parte b) de la Figura 5.11. En ella se ve que el punto de mayor desplazamiento es efectivamente el centro de la lámina. También se aprecia que los esfuerzos Von Mises máximos están localizados en los extremos de la membrana, sobre la parte central. Podríamos esperar que la solución al problema consista en espesores grandes en las orillas de la lámina, y espesores menores en la parte central.

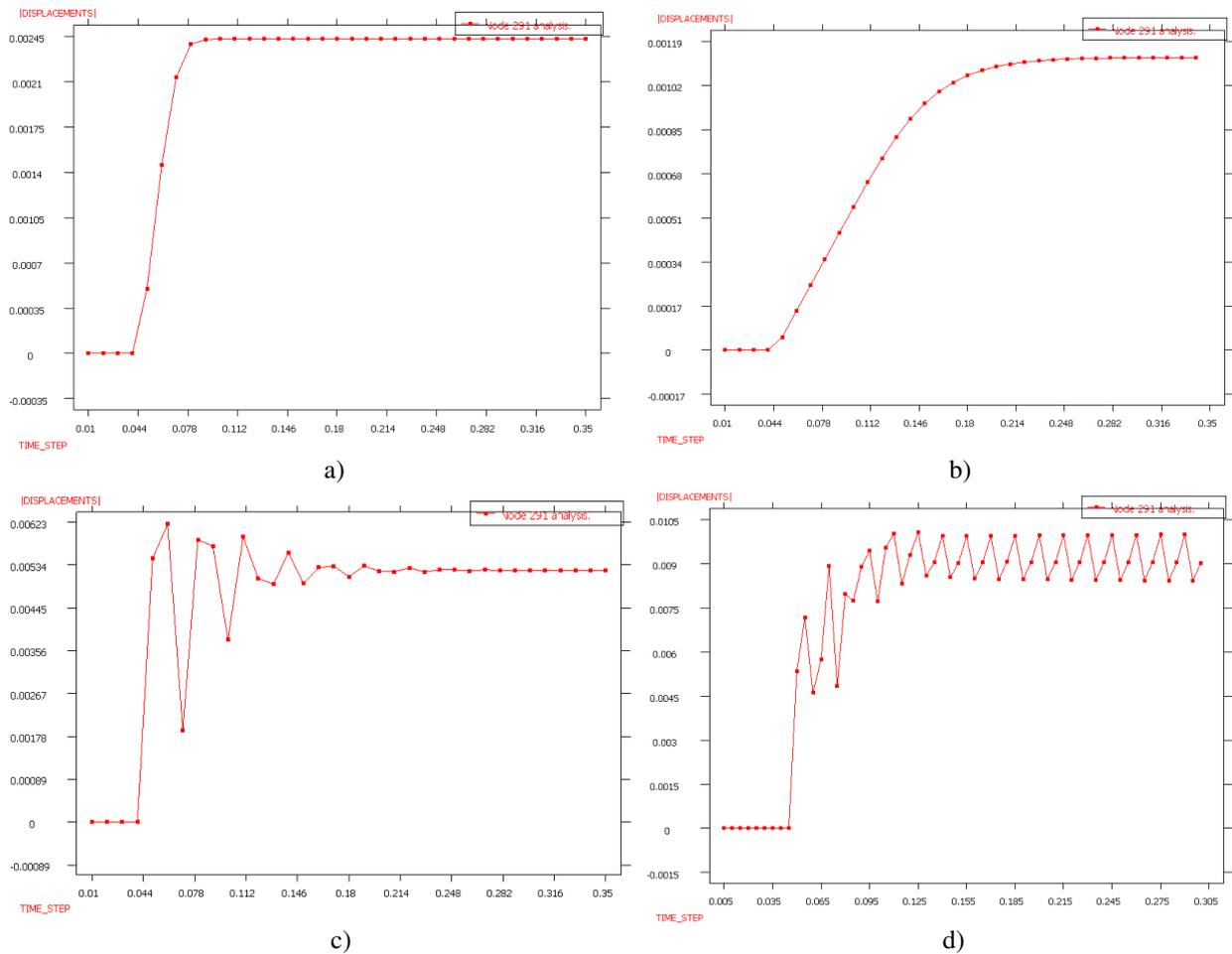


Figura 5.11. Gráficas del desplazamiento total (valor absoluto) del punto central de la membrana para diferentes condiciones de espesor de membrana y tamaño de paso de tiempo.

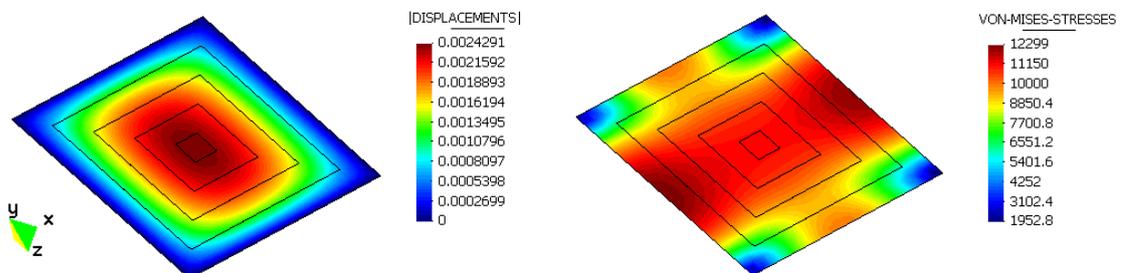


Figura 5.12 Contornos de desplazamientos y de esfuerzos Von Mises en un instante de tiempo para una membrana de 0.1mm de espesor.

Una vez definidas las condiciones de diseño del problema, puede procederse a la optimización con algoritmos evolutivos. En vista de los resultados obtenidos en la sección 5.1,

se optó por resolver este ejemplo únicamente con estrategias evolutivas con ranqueo estocástico para el manejo de las restricciones. Aunque este problema puede abordarse con variables continuas, se prefirió utilizar la versión discreta de las estrategias evolutivas con la finalidad de reducir el espacio de búsqueda. También se optó por ese esquema de solución para poder emplear un sistema de identificación de los individuos que ya se hubieran evaluado en algún momento durante el proceso evolutivo. Esto tuvo la finalidad de evitar el recálculo de individuos que ya se hubieran presentado antes, ya que el problema es sumamente costoso. Cabe mencionar aquí que una sola evaluación de este problema requirió un tiempo promedio de 6 minutos de cálculo, por lo que el uso de tal mecanismo de identificación queda totalmente justificado si con él se podía ahorrar aunque sea un par de evaluaciones.

Para poder utilizar un esquema de solución discreto, además de los valores máximos y mínimos de las variables se requiere una cierta precisión de la solución. Esto determinará el número de valores posibles que tendrán las variables. En el caso que estamos manejando, el número de valores diferentes estará dado por la siguiente expresión, dada la precisión deseada

$$N = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{\text{precision}} + 1$$

Donde t es el espesor de la membrana. N debe ser un valor entero, en caso de no serlo deberá redondearse al entero más cercano, por lo que el valor de la precisión deberá ser recalculado, despejando su valor en la expresión anterior. Entonces, se tiene que la representación de las variables será otra vez una lista de números enteros (desde 1 hasta N), teniéndose por tanto la misma codificación que se utilizó en el problema de las armaduras.

Para este problema en particular, se utilizó una precisión de 0.01mm, lo que da un total de 10 valores diferentes por variable (espesor máximo 0.1mm, mínimo 0.01mm). De esta manera, los valores de los espesores quedan mapeados a números enteros entre 1 y 10. El tamaño del espacio de búsqueda es por tanto 10^5 , al tenerse 5 variables objetivo.

Con el espacio de solución discretizado, los parámetros de la estrategia evolutiva fueron los siguientes:

- 15 μ padres y 30 λ hijos.
- Parámetro de ranqueo estocástico: 0.45
- Desviación estándar para mutaciones: Máxima 5, mínima 1.
- 40 generaciones, 1200 evaluaciones en total.

Debido al enorme costo de evaluación del problema, se hizo una sola prueba, la cual se llevó un tiempo de 90 horas en total. No era posible hacer varias pruebas y calibrar los parámetros para la solución de este problema, por lo que se tomaron basados en los resultados conseguidos para las estructuras metálicas. En la Figura 5.13 aparecen gráficas que muestran el comportamiento del algoritmo en este problema.

El algoritmo tuvo para este problema un comportamiento parecido al exhibido en la optimización de estructuras metálicas. Tuvo un periodo grande de estancamiento de la solución, pero casi al final se presentó una mejoría y después la población convergió rápidamente hacia ese valor. También se observa en la segunda gráfica que al inicio hay muy pocos individuos factibles, pero después el algoritmo encuentra más y mantiene una proporción mayor al 70%. Hay un ligero descenso hacia el final del algoritmo, causado sin duda por la convergencia de la población hacia la solución encontrada, la cual se localiza en la frontera de la región factible. No hay mucho que decir sobre el desempeño del algoritmo en este problema al tenerse

solamente una prueba. La principal intención aquí era sólo mostrar que es posible obtener buenas soluciones a este tipo de problemas con algoritmos evolutivos.

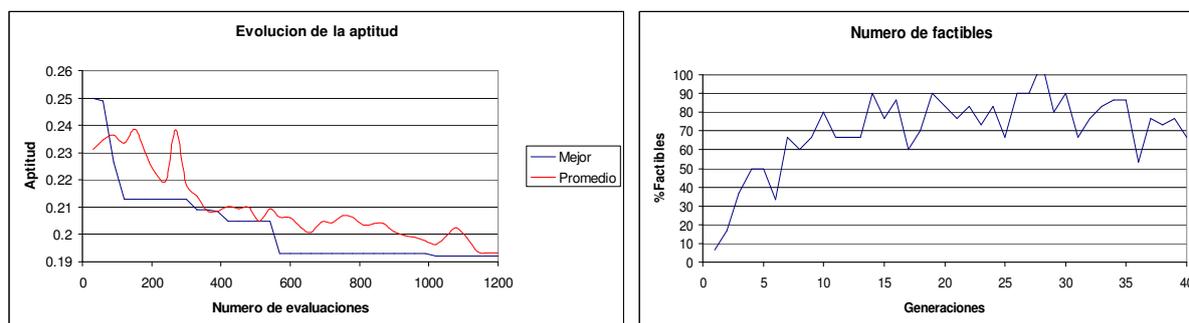


Figura 5.13 Evolución de la aptitud del mejor individuo y del promedio de la población en el problema de la membrana. Variación del porcentaje de individuos factibles en cada generación.

Al final del experimento, el programa elaborado dejó en disco un registro de todas las soluciones que había encontrado y calculado. En dicho archivo se encontró un 25% menos de soluciones al número máximo que se hubiera podido esperar (en el caso de no repetirse ningún individuo), lo cual significó un importante ahorro de tiempo de ejecución y por tanto de costo computacional. Con ello quedó justificado el uso del mecanismo de identificación, y por lo tanto el haber abordado el problema con un algoritmo discreto.

M1	0.04
M2	0.04
M3	0.06
M4	0.07
M5	0.08

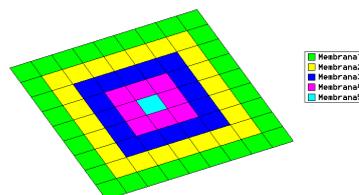


Figura 5.14 Mejor solución encontrada para el problema de la lámina (espesores en milímetros).

La mejor solución encontrada aparece en la Figura 5.14. Resulta un tanto curioso que la membrana sea más delgada en los extremos y más gruesa en el centro, cuando la lógica podría indicar lo contrario. Para entender mejor el porqué de esto, analizamos los resultados obtenidos para este problema. En la Figura 5.15 se muestra la gráfica del valor absoluto de los desplazamientos en el punto central de la lámina. En dicha gráfica se puede apreciar que en ningún momento el desplazamiento es mayor a 0.0035 metros, que es el valor máximo admisible. También se puede ver en la gráfica que el valor máximo se alcanza a los 0.07 segundos. Al estarse manejando material elástico-lineal, los esfuerzos máximos se presentarán junto con el desplazamiento máximo. En la Figura 5.16 se muestran los contornos de desplazamientos y de esfuerzos Von Mises para ese paso de tiempo, pintados sobre la geometría deformada.

En los resultados mostrados en la Figura 5.16 se aprecia cómo el desplazamiento máximo ocurre en el centro de la membrana. Los esfuerzos Von Mises máximos están en los extremos de la membrana, por la parte central, teniéndose un cambio brusco en su valor por el cambio en el espesor de la membrana (las dos primeras secciones son iguales). Lo que esto sugiere es que en las secciones externas la solución está regida por la restricción de esfuerzos, mientras que las secciones internas están regidas por la restricción de desplazamientos. Efectivamente, se hizo una comprobación manual para asegurar que la solución encontrada fuera por lo menos un mínimo local, encontrándose que una reducción en el espesor de cualquiera de las secciones

resultaba en una solución que violaba alguna de las dos restricciones. Al reducir el espesor en las secciones externas se tenían esfuerzos Von Mises mayores al permitido, mientras que el hacerlo en las secciones centrales produjo desplazamientos mayores al permitido.

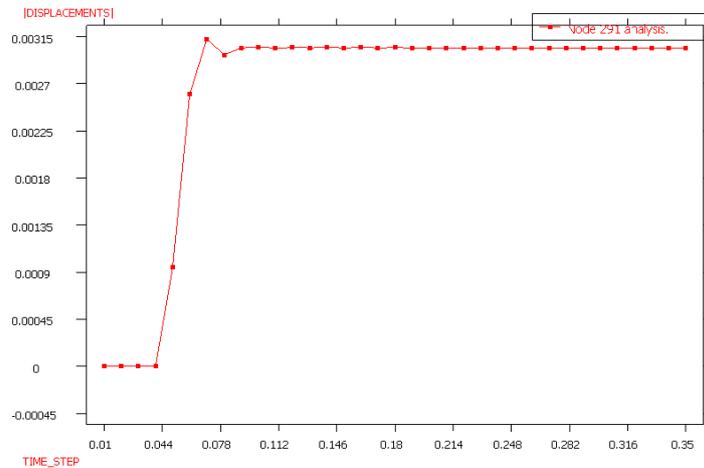


Figura 5.15. Gráfica de desplazamientos en el tiempo en el punto central para la mejor solución encontrada en el problema de la lámina.

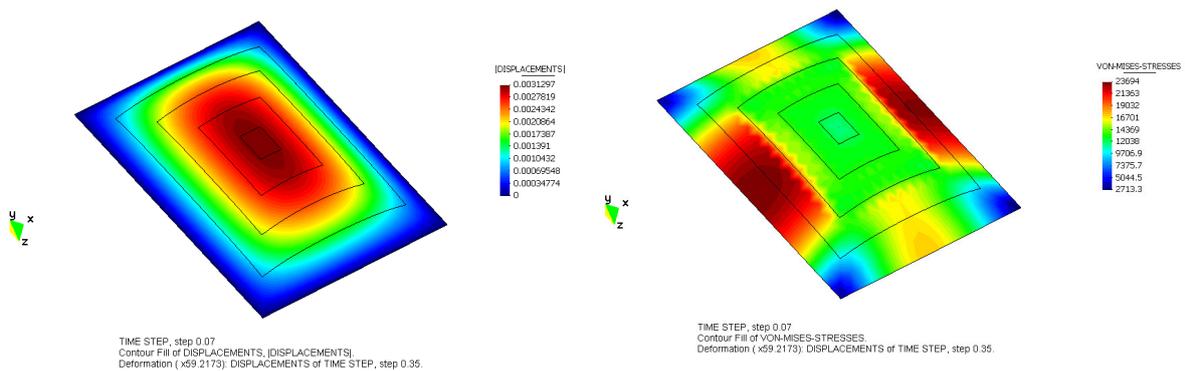


Figura 5.16. Contornos de desplazamientos y esfuerzos Von Mises para un tiempo de 0.07 segundos, en la mejor solución encontrada para el problema de la lámina.

Se hizo también otra comprobación de la solución encontrada utilizando un paso de tiempo menor. Esto con la finalidad de saber si la precisión de la solución no fue afectada por el tamaño del paso de tiempo. En la Figura 5.17 se muestra la gráfica de los desplazamientos en el tiempo para el punto central de la membrana utilizando un paso de tiempo de 0.005 segundos, la mitad del empleado durante el proceso de optimización. Se obtuvo una curva más suave, pero los valores en sí no tuvieron una variación significativa. Precisamente este tipo de cuestiones son las que justifican también el haber abordado el problema con variables discretas. Es indudable que se podría haber logrado un menor peso utilizando un esquema continuo, pero al obtenerse una solución mucho más cerca del límite de la zona factible, se correría el riesgo de que la solución encontrada no resulte factible al utilizar un paso de tiempo más pequeño en el cálculo.

Con fines meramente ilustrativos, se muestra en la Figura 5.18 un campo de vectores de velocidad del fluido junto con la deformación de la membrana. En dicha figura se ve cómo el fluido sigue la forma de los contornos del conducto.

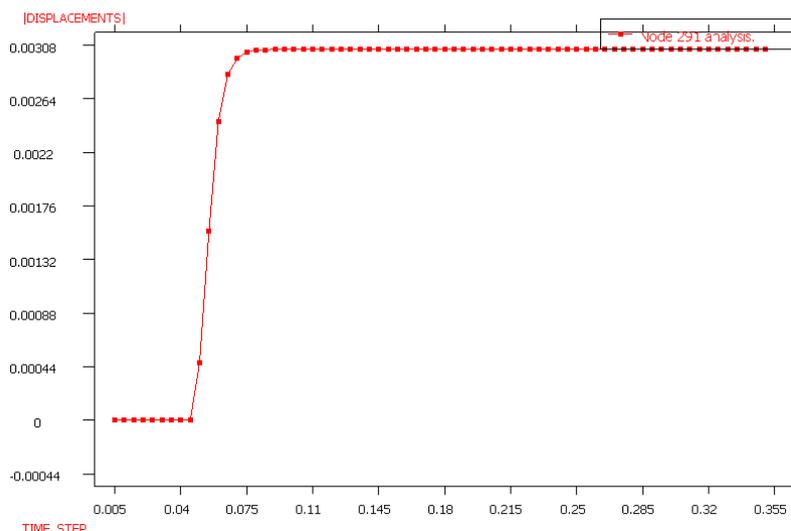


Figura 5.17. Gráfica de desplazamientos en el tiempo en el punto central para la mejor solución encontrada en el problema de la lámina, usando un paso de tiempo de 0.005 segundos.

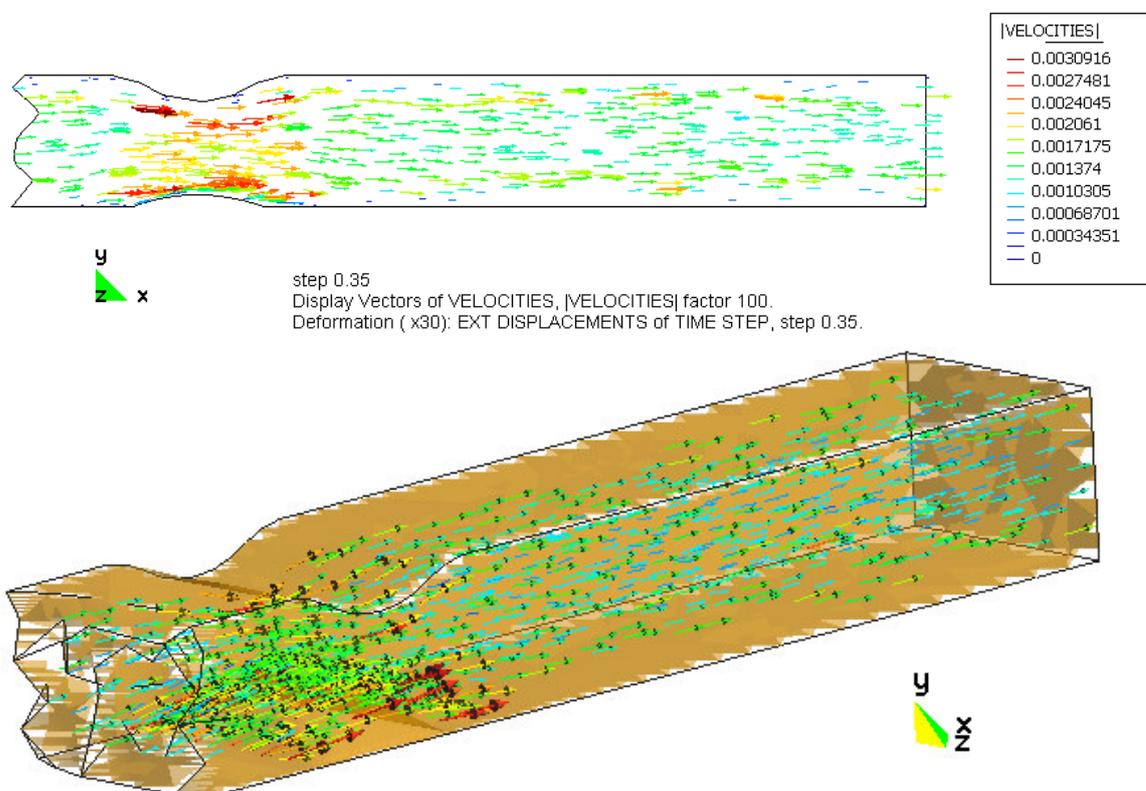


Figura 5.18. Campo de vectores de velocidades del fluido para la mejor solución encontrada.

En este problema, la mejor solución encontrada no presenta vibraciones de la membrana bajo la acción del fluido, lo que implica que la solución es muy poco sensible a la magnitud del tamaño de paso empleado en la simulación. Sin embargo, como se mostró en la Figura 5.11, dentro del espacio de búsqueda hubo individuos que sí presentaban vibraciones. Es indudable que si se hubieran tenido condiciones de diseño diferentes, se podría haber presentado algún caso en que la mejor solución sí presentara vibraciones, lo que conllevaría un mayor costo computacional al tener que emplearse tamaños de paso más pequeños para poder capturar la solución con suficiente precisión.

En esos casos podría pensarse en imponer también restricciones de vibración, algo bastante común en numerosos problemas de ingeniería. Queda aún bastante por hacer en este campo, y este problema es apenas un intento preliminar de este tipo de aplicaciones. Estos problemas son bastante complejos, y una discusión más detallada de todo lo que hay detrás de ellos queda fuera del alcance de la tesis.

5.3 Combinación de Estrategias Evolutivas y Estimación de Distribuciones. Aplicación en la optimización de armaduras metálicas.

A raíz de los resultados obtenidos con los dos algoritmos por separado en el problema de optimización de estructuras metálicas, se notó que cada uno tiene sus ventajas y desventajas. Se vio como para esta clase de problemas, las estrategias evolutivas tienen un mejor desempeño que los EDA's. Uno de los problemas fundamentales del EDA es que requiere una gran cantidad de información para obtener probabilidades "buenas", algo que resulta inviable si se quieren resolver problemas prácticos. Mucho más si se quieren utilizar modelos probabilísticos que consideren dependencias.

En el caso de las estrategias evolutivas, se observó que tienen un buen comportamiento, pero a medida que se acercan al óptimo las mejoras se vuelven muy lentas, y se necesita dejarlo funcionar un buen número de generaciones para asegurarnos de que la solución que encuentre sea la óptima (o muy cercana a ella). La pregunta ahora es ¿porqué no combinar ambos algoritmos para tratar de explotar las ventajas de cada uno? Una estrategia evolutiva puede ser un excelente punto de arranque para conseguir buenas distribuciones de probabilidad para el EDA, y una vez que se tienen, éstas pueden ayudar a la estrategia evolutiva a concentrar su búsqueda en las regiones más promisorias del espacio de búsqueda, acelerando la convergencia de la EE hacia el óptimo.

Con base en estas ideas, se implementó un algoritmo combinado EE-PBIL, cuyo esquema es el siguiente:

- Arrancar el problema con una estrategia evolutiva sola. Inicializar los vectores de probabilidades con una distribución uniforme.
- De toda la población, seleccionar una muestra M de individuos en cada generación, y con ella actualizar los vectores de probabilidades. Sin embargo, no generamos ningún individuo con ellas hasta antes de un cierto número de generaciones.
- Transcurrido dicho número de generaciones, empezamos a generar algunos de los λ hijos con las distribuciones de probabilidad. Se puede empezar con una proporción pequeña, e ir aumentando conforme el algoritmo avanza, de tal suerte que en cada generación una parte de los hijos se generan con las probabilidades, y otra parte a la manera tradicional de las EE's.
- Si se detecta estancamiento en la aptitud mejor al cabo de cierto número de generaciones, eliminamos una cantidad cercana a la mitad de los μ padres y los regeneramos utilizando las probabilidades. Esto no se hará antes de que transcurra el número mínimo de generaciones para que se empiecen a generar hijos con el EDA.

Para la implementación que se manejó en este trabajo, la selección de la muestra M de individuos se basó en seleccionar los primeros k individuos que queden después de ordenarlos con ranqueo estocástico, ya que éste ha probado ser un mecanismo sencillo y eficiente para manejo de restricciones. Con el esquema indicado, se resolvieron 2 ejemplos, el primero es la estructura de 10 barras utilizada en la sección 5.1, y después otro ejemplo más complicado.

En este caso, se agregaron dos criterios de paro adicionales al de el número de generaciones, y que son los siguientes: que no se tuviera mejora en un cierto número de generaciones, o que la diferencia entre la aptitud promedio y la aptitud mejor fuera menor que 0.1 veces la desviación estándar de la población. En ningún caso se podrá parar el algoritmo

antes de que se empiecen a generar hijos con las distribuciones, para darle siempre al EDA oportunidad de contribuir en la solución. Si se presenta una desviación estándar pequeña en la población, las probabilidades son revisadas y aquellas que sean inferiores a un umbral (0.1 de la probabilidad uniforme) son puestas a cero y luego se aplica una regularización para cumplir que la suma de las probabilidades sea 1. Este mecanismo funciona como un recorte del espacio de búsqueda.

5.3.1 Resultados para la estructura de 10 barras.

Este ejemplo fue resuelto haciendo una comparación entre las EE's solas y el algoritmo combinado, igual haciendo una serie de 30 repeticiones para cada algoritmo.

Se utilizaron 50 padres y 100 hijos para ambos algoritmos, utilizando un máximo de 250 generaciones. Para el algoritmo combinado, se tomó una muestra de 45 individuos para el cálculo de las probabilidades, tomando a los primeros individuos luego de ordenar la población por ranqueo estocástico. Se empiezan a generar hijos con las probabilidades hasta la generación 75, con una proporción inicial de 0. A partir de esa generación, la proporción de hijos generados con las probabilidades aumenta linealmente hasta llegar a 50% en la generación 250. A partir de la generación 75, si al cabo de 15 generaciones no se tiene una mejora en la solución, se elimina a la mitad de los padres y se regeneran con las probabilidades. A los hijos generados con las probabilidades se les asigna la sigma máxima, que en este caso es de 5.

Se hicieron dos tipos de pruebas, una imponiendo la condición de paro mencionada (puesta en 35 generaciones sin mejora) y otra sin ella, dejando funcionar el algoritmo las 250 generaciones. Los resultados se resumen en la Tabla 5.3.

	EE con paro	EE+PBIL con paro	EE sin paro	EE+PBIL sin paro
Mejor	82.2739	82.2739	82.2739	82.2739
Peor	92.4638	101.9020	83.8515	84.2989
Media	84.8144	85.5585	82.6150	82.5373
Std D	2.0988	5.0718	0.4869	0.5745
Mediana	84.0739	82.9560	82.2739	82.2739
Exitos	1 de 30	14 de 30	18 de 30	24 de 30

Tabla 5.3 Resultados obtenidos con EE y EE-PBIL para la estructura de 10 barras.

Se observan resultados diferentes para cada variante de prueba. Cuando se utiliza el criterio de parada, el algoritmo combinado llega muchas más veces a la mejor solución conocida que la estrategia evolutiva, teniendo por tanto mejor mediana. Sin embargo, no es mejor a la EE en cuando al peor valor, la media y la desviación estándar. Cuando se deja correr el algoritmo las 250 generaciones, ambos algoritmos mejoran mucho sus resultados, llegando a la solución mejor una mayor cantidad de veces. El algoritmo combinado sigue teniendo un mayor éxito que la EE en este aspecto, y en los demás campos los resultados son muy semejantes, con una ligera ventaja para la EE en el peor y la desviación estándar, y un saldo ligeramente favorable al algoritmo combinado en la media.

Se realizó una segunda prueba para el algoritmo combinado, con la modificación de que la proporción inicial de hijos generados con las distribuciones de probabilidad en la generación 75 se aumentó a un 20% en lugar de cero. La proporción sigue aumentando linealmente, hasta llegar a un 50% en la generación 250. Además, cuando se detectó estancamiento, se dejaron

únicamente los 20 primeros padres de la población, ordenados por ranqueo estocástico. En la Tabla 5.4 se muestra el resumen de los resultados obtenidos.

	EE con paro	EE+PBIL con paro	EE sin paro	EE+PBIL sin paro
Mejor	82.2739	82.2739	82.2739	82.2739
Peor	92.4638	95.2157	83.8515	83.8012
Media	84.8144	83.4532	82.6150	82.4460
Std D	2.0988	2.6657	0.4869	0.4047
Mediana	84.0739	82.2739	82.2739	82.2739
Exitos	1 de 30	21 de 30	18 de 30	25 de 30

Tabla 5.6 Resultados obtenidos con EE y EE-PBIL para la estructura de 10 barras, en la segunda prueba.

Los resultados mejoraron con respecto a la anterior prueba, pero ahora es de destacar que el algoritmo combinado requiere un promedio de 126 generaciones para encontrar la mejor solución conocida cuando se le pone el criterio de parada (con 30 generaciones de estancamiento, no 35), contra 149 que requirió en la anterior prueba. En este caso la estrategia evolutiva sigue siendo mejor en cuanto al peor valor y la desviación estándar, pero ahora sí el algoritmo combinado tiene una mejor media que la EE sola. Y cuando se le deja funcionar las 250 generaciones, el número de éxitos conseguidos por el EE-PBIL aumenta muy poco, pero ahora sí supera en todos los aspectos a la estrategia evolutiva sola.

Lo que es más de llamar la atención, es que el algoritmo combinado no requiere de muchas generaciones para lograr un buen número de éxitos en este problema tan difícil. Eso indica que para el EDA resulta muy útil la información que le brinda la estrategia evolutiva para lograr unas buenas distribuciones de probabilidad, y a su vez el EDA ayuda a la EE a concentrar su búsqueda en las zonas más prometedoras, lo que sugiere que las suposiciones hechas al proponer este algoritmo son correctas.

Las Figuras 5.19 y 5.20 muestran la evolución de las aptitudes mejor y promedio de la población de ambos algoritmos para cada una de las variantes en la última prueba. Las gráficas corresponden a pruebas donde se encontró la mejor solución, o bien donde se encontró en un menor número de generaciones.

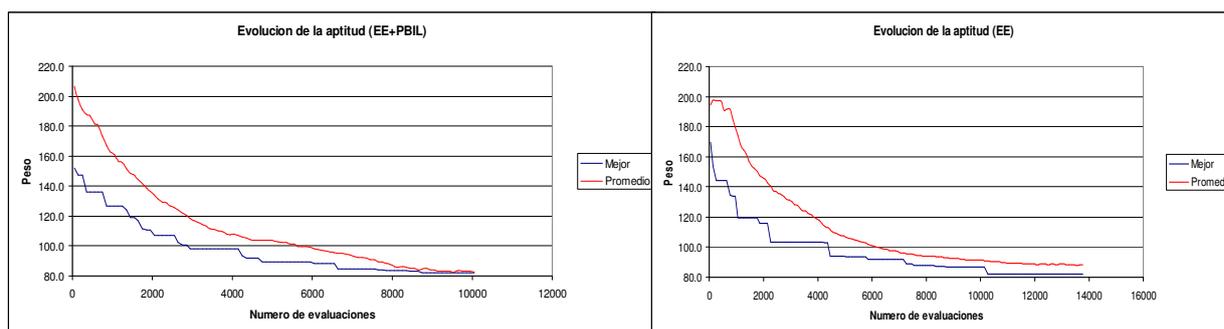


Figura 5.19 Comportamiento de la EE y EE-PBIL para la estructura de 10 barras utilizando criterio de parada.

Se aprecia un poco en dichas figuras la contribución que hace el EDA para la convergencia de la solución, al rebasarse las 7500 evaluaciones (generación 75), lo que no ocurre en la estrategia evolutiva sola, aún en el caso en que no se utiliza otra condición de paro además del número máximo de generaciones.

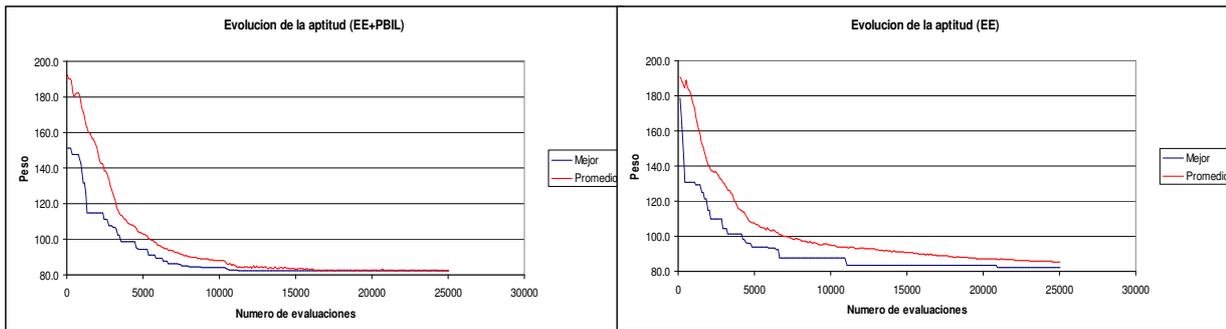


Figura 5.20 Comportamiento de la EE y EE-PBIL para la estructura de 10 barras, sin criterio de parada.

La Figura 5.21 muestra la evolución del porcentaje de individuos factibles en el total de la población. Mientras que la estrategia evolutiva sola mantiene una oscilación constante, no ocurre lo mismo en el algoritmo combinado, pues casi inmediatamente después de que se empiezan a generar individuos con las probabilidades, la proporción cae significativamente, para después aumentar gradualmente. Ello se debe a que la solución se localiza en la frontera de la región factible, y cuando el EDA se activa se tienen muchos individuos en esa zona, quedando muchos afuera de la zona factible pero muy cerca del óptimo. Después la proporción aumenta gradualmente, conforme la aptitud de la población converge alrededor del valor óptimo.

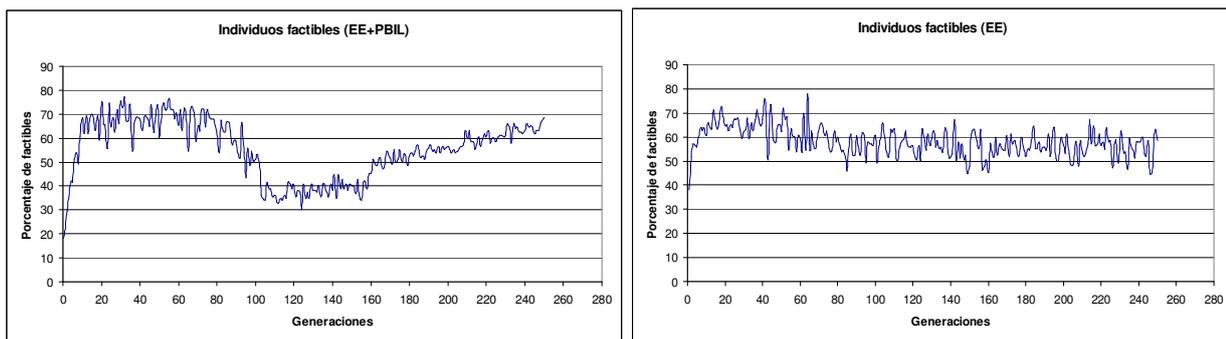


Figura 5.21 Evolución de los individuos factibles para la EE y EE-PBIL para la estructura de 10 barras, sin criterio de parada.

Ahora se realizará un análisis sobre la evolución de las distribuciones de probabilidad para tratar de comprender mejor lo que el algoritmo está haciendo. Primeramente, se presentan en la Tabla 5.7 los perfiles de acero que conforman la mejor solución encontrada para este problema, junto con su numeración en el catálogo utilizado.

Barra	Perfil (denominación)	Numero en el catálogo
1	OR 2X2 4	8
2	OR 1X1 2.4	1
3	OR 2_1/2X2_1/2 3.2	9
4	OR 2X2 2.8	6
5	OR 1X1 2.4	1
6	OR 1X1 2.4	1
7	OR 1X1 2.4	1
8	OR 3X3 3.2	12
9	OR 1X1 3.4	2
10	OR 2X2 2.8	6

Tabla 5.7 Perfiles de acero de la mejor solución conocida para la armadura de 10 barras.

Las gráficas que aparecen en la Figura 5.22 muestran las distribuciones de probabilidad acumulada calculadas por el EDA a lo largo del proceso evolutivo. Dichas gráficas fueron obtenidas de una de las pruebas anteriores

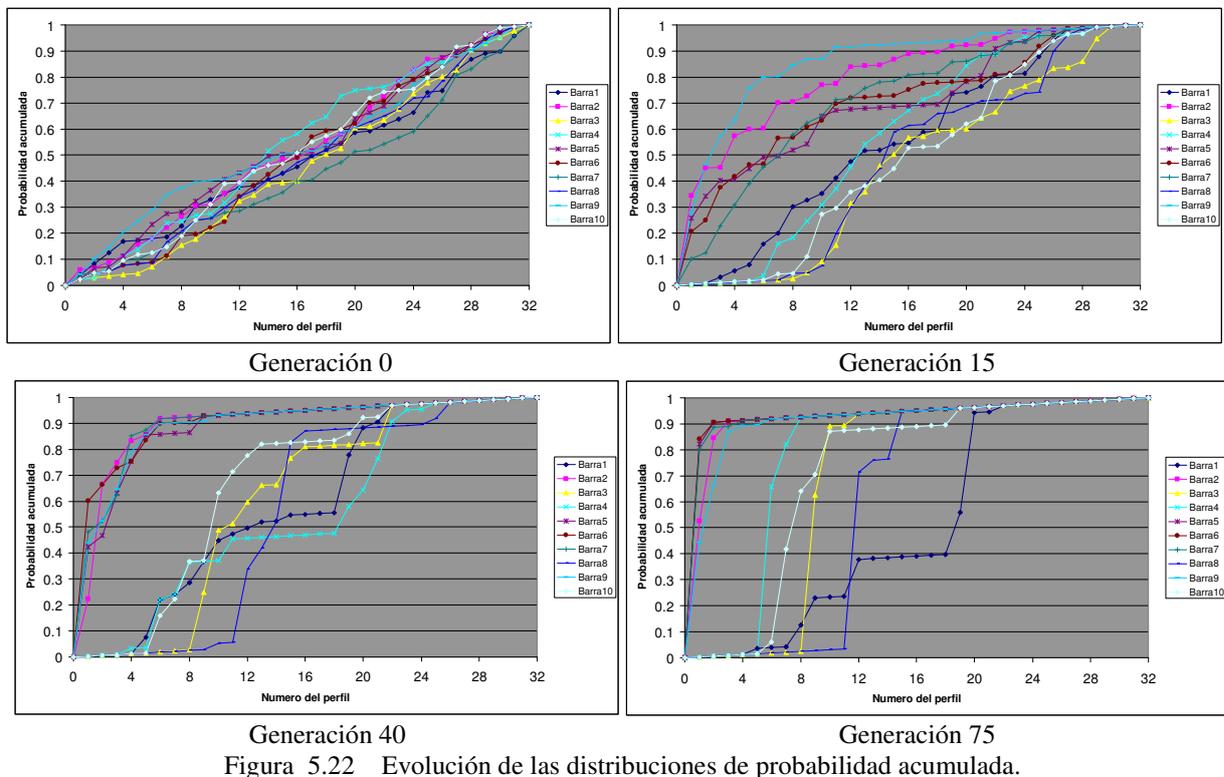


Figura 5.22 Evolución de las distribuciones de probabilidad acumulada.

En la generación 0 se aprecia que las probabilidades son prácticamente uniformes, algo lógico ya que las distribuciones se inician a la probabilidad uniforme, y se actualizan con los mejores μ individuos de la población inicial. Para la generación 15 varias de las distribuciones ya no son uniformes, aunque no se puede apreciar aún un valor dominante en ninguna de ellas. Para la generación 40 varias distribuciones ya tienen uno o más valores dominantes, y ello se acentúa en la generación 75, que es el punto donde se empiezan a generar individuos con el EDA. A excepción de las barras 1 y 10, las demás variables ya presentan una alta probabilidad para los valores correspondientes a la mejor solución, presentada en la Tabla 5.7. Eso indica que en ese punto, las distribuciones de probabilidad ya están muy cerca de la solución, siendo un muy buen punto de referencia para ayudar a las estrategias evolutivas a encontrar la solución, la cual apareció en la generación 87 para esa prueba en específico.

Las gráficas de la Figura 5.23 muestran las probabilidades acumuladas en las generaciones 85 y 95, que corresponden a puntos antes de la solución y antes de parar el algoritmo respectivamente (se detuvo en la generación 100). No hay grandes cambios en las probabilidades de la generación 75 a la 85, lo que se observa en ésta última es que todas las variables ya presentan probabilidad cero para muchos valores, lo que se traduce en un recorte del espacio de búsqueda. Algo que se pretendía tuviera el algoritmo. Y para la generación 95 todas las variables ya tienen una alta probabilidad para los valores que corresponden a la solución.

Este análisis nos indica el buen funcionamiento de este algoritmo. Las estrategias evolutivas constituyeron un excelente medio de obtención de información para lograr buenas distribuciones de probabilidad. A su vez, estas probabilidades ayudan a la estrategia evolutiva a

enfocarse mejor en las zonas más promisorias del espacio de búsqueda, sin que ello implique una pérdida importante de diversidad.

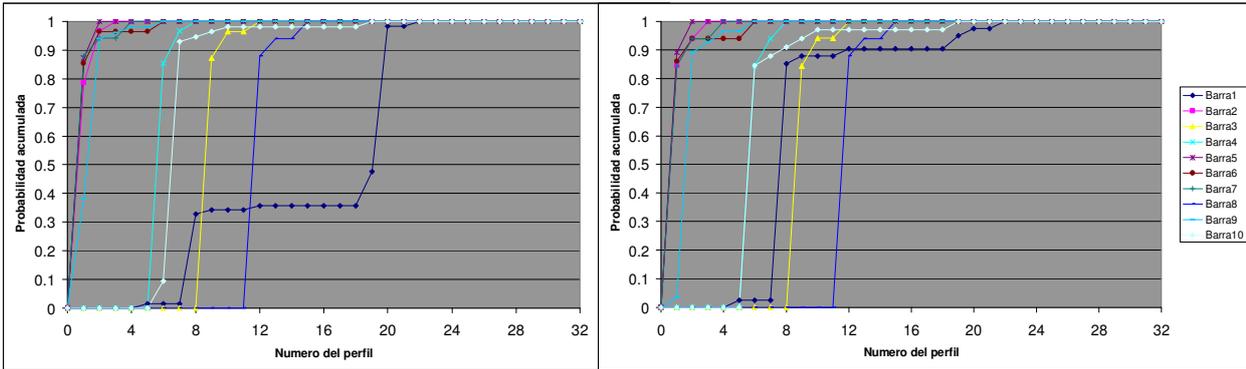


Figura 5.23 Distribuciones de probabilidad acumulada en generaciones 85 y 95.

Finalmente, y con fines meramente de comprobación de la solución, se presentan en la Figura 5.24 los resultados de la evaluación de la mejor solución encontrada. Se muestra en la figura una deformada y el campo de desplazamientos para la combinación de cargas de servicio, donde se ve que los desplazamientos no son mayores a 1cm. También se muestran los esfuerzos normales en las barras correspondientes a la combinación de carga más crítica, y un contorno que muestra a qué eficiencia están trabajando las barras de la estructura. Se ve en dicha figura que varias de las barras trabajan a menos de la mitad de su capacidad. Ello se debe en buena parte a la conformación propia de la armadura, y en otra parte a que en dichas barras el perfil resultante fue el más chico del catálogo. Puede concluirse que, si no es ésta la verdadera solución óptima, sí está muy cerca de ella.

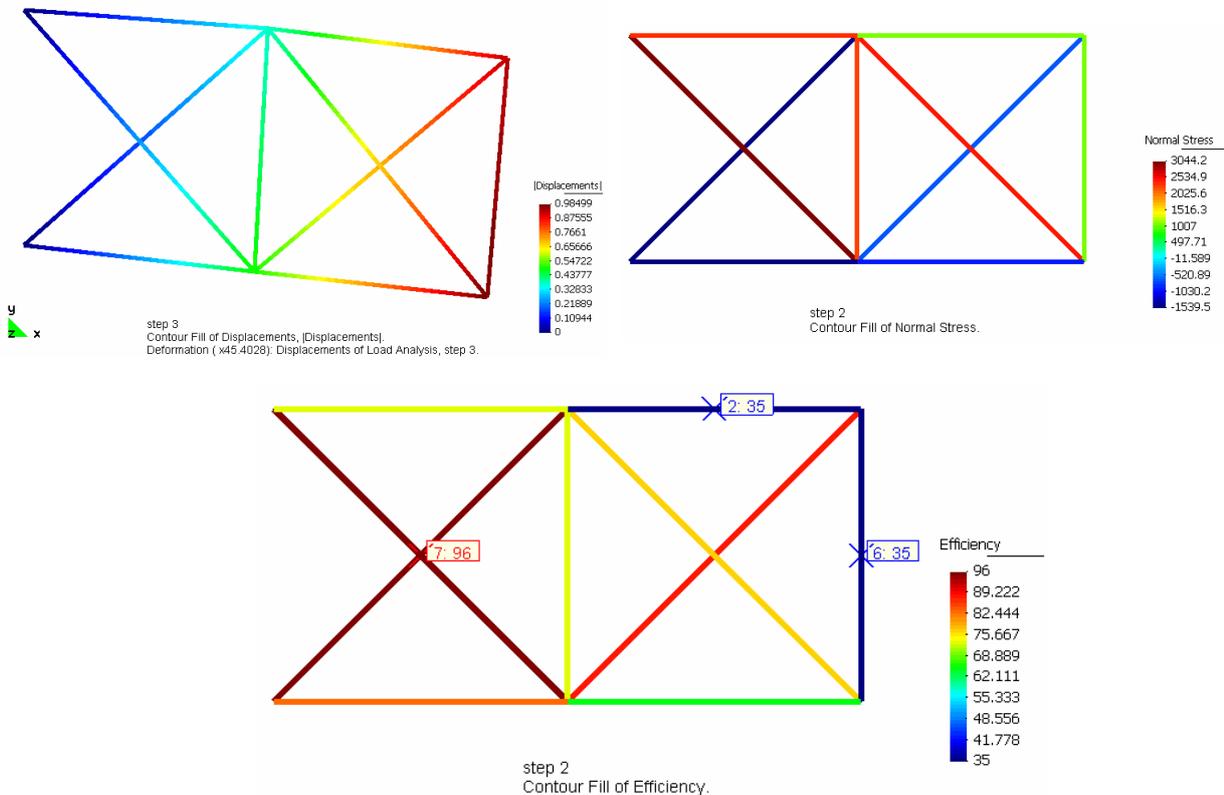


Figura 5.24 Resultados de la mejor solución encontrada para el problema de 10 barras. Deformada y desplazamientos para carga de servicio, esfuerzos normales y eficiencia de trabajo bajo carga última.

5.3.2 Estructura de 49 barras.

El último ejemplo presentado es de una gran complejidad, pues tiene 25 secciones diferentes, lo que hace que el problema tenga una gran cantidad de mínimos locales, además de el enorme tamaño del espacio de búsqueda. En la Figura 5.25 se presenta la geometría y la disposición de las cargas de la estructura. La fuerza P tiene un valor de $(200, -200)$ kg para carga muerta, y un valor de $(1000, 0)$ para carga viva.

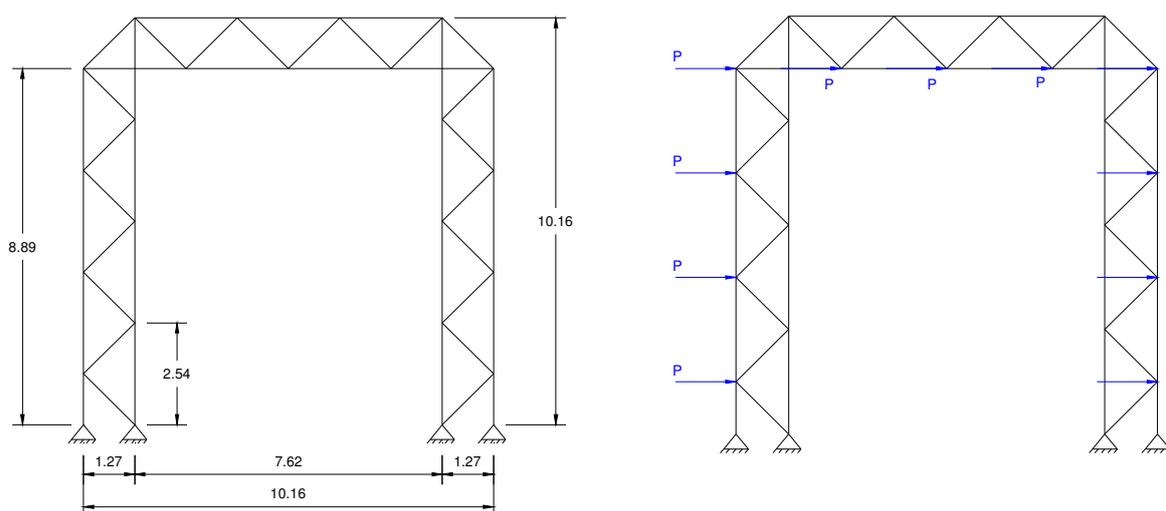


Figura 5.25. Geometría y cargas para el problema de 49 barras. Las longitudes están en metros.

Para la solución de este ejemplo se empleó el mismo catálogo de 32 perfiles rectangulares OR utilizado para los otros ejemplos, considerando acero estructural ASTM A-500-C de alta resistencia, cuyo límite de fluencia es 3500 kg/cm^2 . El desplazamiento máximo admisible para esta estructura fue de 4cm en cualquier nodo. Al tenerse 25 secciones distintas, el espacio de búsqueda tiene 32^{25} combinaciones diferentes. Un ejemplo enorme y muy difícil.

El ejemplo se resolvió con el algoritmo combinado y con la estrategia evolutiva discreta, utilizándose los siguientes parámetros para el EE-PBIL:

- 100 μ padres y 200 λ hijos.
- Sigmas para mutación: 5 máxima, 1 mínima.
- Recombinación panmítica discreta, para variables de control y variables objetivo.
- Tamaño de muestra: 85 individuos resultantes del ranqueo estocástico.
- Alfa para actualización de probabilidades: 0.9 (parámetro de aprendizaje).
- Parámetro de ranqueo estocástico: 0.45.
- 400 generaciones en total.
- Las probabilidades empiezan a generar hijos en la generación 100. Proporción de hijos en generación 100: 20%. Proporción de hijos en generación 400: 50%.
- Criterio de paro: 40 generaciones de estancamiento. Esto sólo se aplica a partir de la generación 100 para dar oportunidad al EDA de contribuir en la solución.

Además, a partir de la generación 100, si no hay mejoría en 20 generaciones se dejan sobrevivir los 30 primeros padres (ordenados por ranqueo estocástico) y el resto son regenerados con las distribuciones de probabilidad. Las variables de control de los individuos generados con las probabilidades se inicializan al valor máximo, que es 5. Para la estrategia evolutiva sola

se utilizaron los mismos parámetros que para el algoritmo combinado, desde luego tomando sólo los que le corresponden.

Se ejecutaron también dos variantes de prueba, distinguiéndose únicamente si se utiliza o no la condición de paro mencionada. Para cada uno de ellos se hizo una serie de 30 repeticiones (cada una de 5 minutos aproximadamente), cuyos resultados aparecen en la Tabla 5.8.

	EE con paro	EE+PBIL con paro	EE sin paro	EE+PBIL sin paro
Mejor	997.617	976.102	992.100	975.4460
Peor	1062.950	994.337	1010.670	996.3310
Media	1023.006	983.326	999.951	983.2472
Std D	13.884	4.795	5.325	5.0897
Mediana	1023.630	982.325	998.360	982.4930
Gen. Promedio	217	314	-	-

Tabla 5.8. Resultados para la estructura de 49 barras, obtenidos con Estrategias Evolutivas y el EE-PBIL.

En este caso no se muestra un renglón correspondiente a un número de ejecuciones exitosas, ya que cada variante de prueba encontró sólo una vez su mejor valor, además de que dicho mejor valor es diferente para cada una de las variantes. En los resultados de la tabla, se ve cómo el algoritmo combinado EE-PBIL supera en todo a la estrategia evolutiva. Además, cuando se utilizó el criterio de paro, se encontró que la estrategia evolutiva tiende a estancarse más fácilmente, ya que tiene un mucho menor número de generaciones promedio en correr antes de detenerse.

Al ser este un problema más complicado y costoso que el de la estructura de 10 barras, resulta difícil hacer un análisis tan detallado como en aquel caso. Las gráficas que aparecen en la Figura 5.26 muestran la evolución de la aptitud del mejor y el promedio para ambos algoritmos, en el mejor resultado que encontró cada algoritmo sin tomar en cuenta el criterio de paro. La dificultad de este problema queda de manifiesto desde el inicio de las ejecuciones, pues de entrada no se tienen individuos factibles, como se muestra en las gráficas de la Figura 5.27. A ello se deben las oscilaciones en la aptitud del mejor al principio de las pruebas, pero una vez que se encuentra algún individuo factible se empiezan a generar muchos más. Se observa en las gráficas de la Figura 5.26 que el algoritmo combinado tiene una convergencia más estrecha del valor de la aptitud promedio de la población hacia el valor mejor.

En las gráficas de la Figura 5.27 se observa cómo la estrategia evolutiva mantiene una proporción más o menos constante de individuos factibles en la población una vez que los encuentra, mientras que el algoritmo combinado presenta un descenso en dicha proporción una vez alcanzada la zona factible para después permanecer casi constante, y con una proporción menor a la estrategia evolutiva. Ello se debe a que una vez más, la solución encontrada se localiza en la frontera de la región factible, y la mayor convergencia del algoritmo combinado hacia la mejor solución produce que muchos individuos muy cercanos a ella queden afuera de la zona factible.

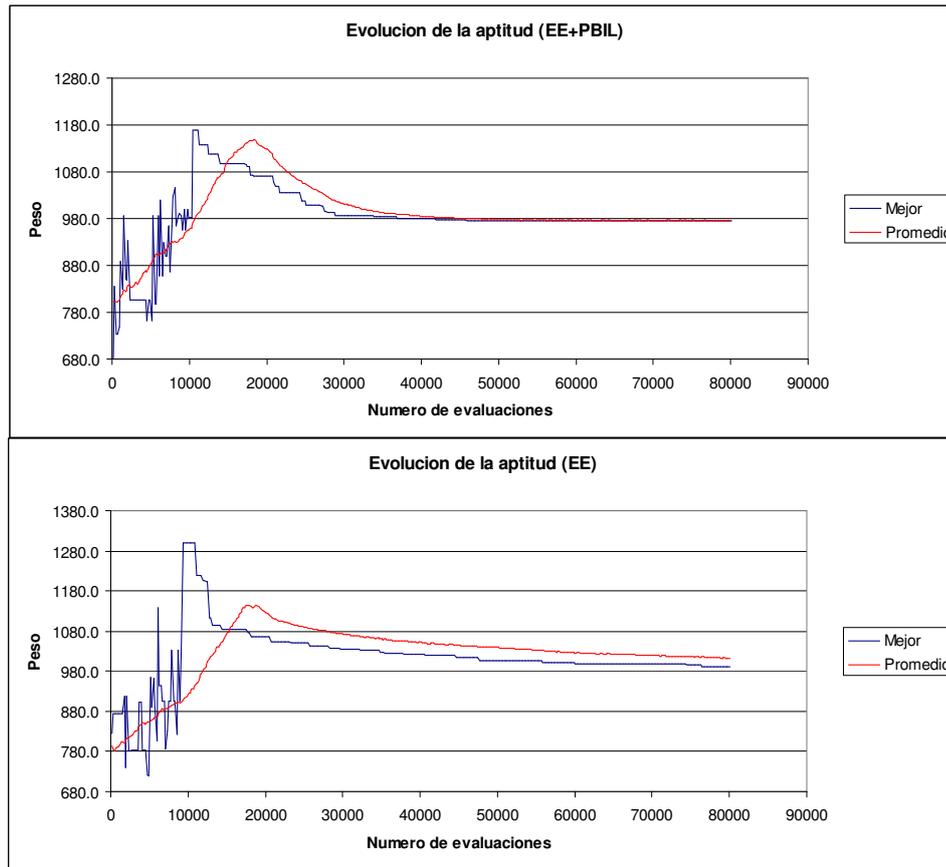


Figura 5.26. Evolución de la aptitud mejor y promedio para la mejor solución encontrada en la estructura de 49 barras por cada algoritmo, en la variante de prueba sin condición de parada.

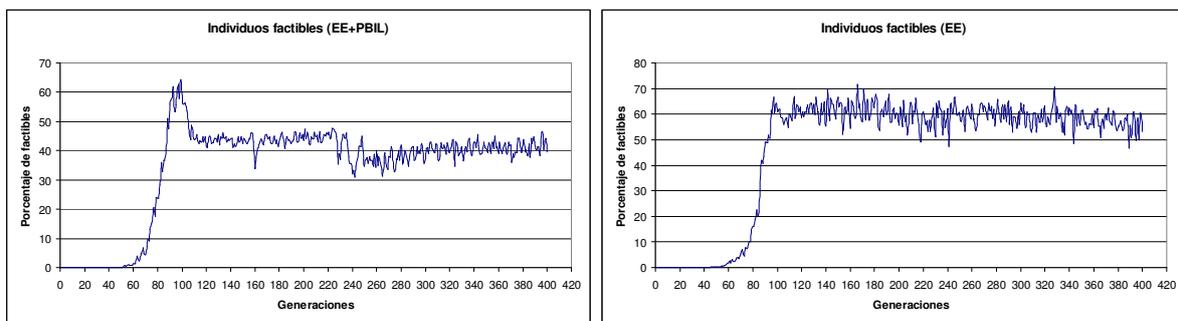


Figura 5.27. Porcentaje de individuos factibles en cada generación para la mejor solución encontrada en la estructura de 49 barras por cada algoritmo, en la variante de prueba sin condición de parada.

Finalmente, en la Figura 5.28 se muestran los resultados de la evaluación de la estructura para la mejor solución obtenida con fines de comprobación. A mano se hizo una comprobación de la misma para asegurarse de que la estructura fuera al menos un mínimo local. Aunque en la figura se aprecia que la mayoría de las barras trabajan a una eficiencia muy baja y que los desplazamientos bajo cargas de servicio son mucho menores al máximo permitido, al colocar un perfil de menor peso en cualquiera de las barras se obtenía una estructura que no satisfacía alguna de las dos restricciones. Ello confirma la enorme dificultad de este ejemplo, pues al

cambiar una sola barra todas las demás tienen cambios en sus condiciones de carga y deformación.

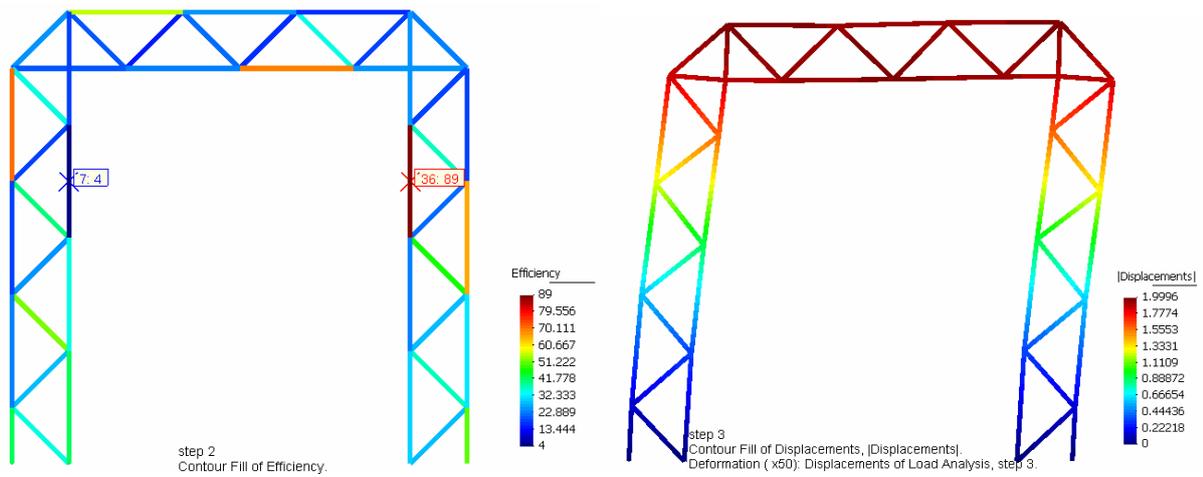


Figura 5.28. Resultados para la mejor solución encontrada. Eficiencia de trabajo de las barras y contorno de desplazamientos en configuración deformada.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO.

En este trabajo se han aplicado con éxito los algoritmos evolutivos en la solución de dos tipos de problemas complicados de ingeniería, como son la optimización de estructuras metálicas y la optimización de un problema que involucra interacción fluido-estructura. Se han utilizado algoritmos discretos al ser los que mejor se adaptan al tipo de problemas atacados.

Se ha visto como estos algoritmos pueden ser utilizados sin mayores cambios en la solución de problemas de naturaleza muy distinta, al no requerir conocimiento a priori sobre el problema en cuestión. Lo único que necesita es una función de transferencia adecuada (codificador-decodificador) de la información entre el algoritmo evolutivo (optimizador) y el evaluador de la función objetivo.

A la luz de los resultados obtenidos, se observó que los Algoritmos de Estimación de Distribuciones (EDA's) por sí solos no resultaron una opción tan buena como las Estrategias Evolutivas al utilizarlos con variables no binarias, ya que requieren una enorme cantidad de información para conseguir "buenas" distribuciones de probabilidad que conduzcan a la solución óptima.

Las Estrategias Evolutivas condujeron a resultados muy buenos si se les dejaba funcionar una buena cantidad de generaciones, aunque eso resulta indeseable cuando los problemas a resolver tienen funciones de evaluación muy costosa.

Se ha visto también cómo una combinación de EDA's y EE's produce mejores resultados que cada uno de los algoritmos por separado, pues al parecer uno complementa la información del otro, proporcionando un adecuado balance entre diversidad en la búsqueda y convergencia hacia la solución óptima, lo que se traduce en una buena exploración del espacio de búsqueda y en una reducción del número de evaluaciones necesarias de la función objetivo para encontrar la solución óptima, o por lo menos una muy cercana a ella.

Como trabajo para el futuro queda una mayor exploración sobre la combinación entre estas dos estrategias, a fin de comprender mejor en qué forma se complementan, lo que permitirá explotar mejor las características de uno y otro para así aumentar la efectividad del algoritmo. Esto puede hacerse aplicándolo sobre los mismos problemas, pero también pueden buscarse otras aplicaciones de interés en ingeniería y otras ramas del conocimiento.

REFERENCIAS.

- [1] Hernández, A., Bacles, B.P., Coello, C.A. “Estrategias Evolutivas: La versión alemana del algoritmo genético (Parte I)”.
- [2] Hernández, A., Bacles, B.P., Coello, C.A. “Estrategias Evolutivas: La versión alemana del algoritmo genético (Parte II)”.
- [3] Schwefel, H. P. & Bäck T., “Evolution Strategies II: Variants and their computational implementation”, en Périaux J., Winter G., (eds.), *Genetic Algorithms in Engineering and Computer Science*, John Wiley and Sons, 1995.
- [4] Schwefel, H. P., Rudolph G. & Bäck T., “Contemporary Evolution Strategies”, en Morán, F., Moreno, A., Merelo, J., Chacón, P., (eds.), *Advances in Artificial Life, Lecture Notes in Artificial Intelligence*, Vol. 929, Springer Verlag, Berlin, 1995.
- [5] Schwefel, Hans-Paul, “Evolution and Optimum Seeking”, John Wiley and Sons, 1995.
- [6] Schwefel, Hans-Paul. “Numerical Optimization of Computer Models”, John Wiley & Sons, Great Britain, 1981.
- [7] Botello, S., Hernández, A., Lizárraga, G., Coello, C. “ISPAES: Un nuevo algoritmo evolutivo para la optimización de una o varias funciones objetivo sujetas a restricciones” *Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. Vol. 20, No. 2, 2004.
- [8] Runarsson, T., Yao, X. “Stochastic Ranking for constrained evolutionary optimization”, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. Vol. 4, No. 3, pp. 284-294. 2000.
- [9] S. Baluja, R. Caruana. “Removing the Genetics from the Standard Genetic Algorithm”. *Proceedings of the Twelfth International Conference on Machine Learning*, Lake Tahoe, CA. July, 1995.
- [10] Baluja, S. “Population-Based Incremental Learning: A Method for Integrating Genetic Search Based Function Optimization and Competitive Learning”. *Carnegie Mellon University. Technical Report. CMU-CS-94-163*. 1994.
- [11] Mühlenbein, H. “The equation for response to selection and its use for prediction”. *Evolutionary Computation*, 5(3): 303-346. 1998.
- [12] Larrañaga, P., Lozano, J.A. “Estimation Distribution Algorithms. A new tool for evolutionary optimization”, *Estimation of Distribution Algorithms EDA and probabilistic graphical models*. Kluwer Academic Publishers. 2001.
- [13] Soto, M. “Un estudio sobre los Algoritmos Evolutivos con Estimación de Distribuciones basados en poliárboles y su costo de evaluación”, Tesis doctoral. Instituto de Ciencias, Matemática y Física, La Habana, Cuba. 2003.
- [14] Ritz, W. “Über eine neue Methode zur Lösung gewissen Variations-Probleme der mathematischen Physik”, *J. Reine angew. Math.*, 135, 1-61, 1909.

- [15] Prager, W., y Synge, J.L. “Approximation in elasticity based on the concept of functions space”, Q.J. Appl. Math., 5, 241-69, 1947.
- [16] Richardson, L.F. “The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems”, Trans. Roy. Soc. (London), A210, 307-57, 1910.
- [17] Bazeley, G.P., Cheung, Y.K., Irons, B.M. Y Zienkiewicz, O.C. “Triangular elements in bending-conforming and non-conforming solutions”, Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. Tech., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, 1965.
- [18] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. “El método de los elementos finitos. Formulación básica y problemas lineales” Volumen 1, 4ª Ed. McGraw Hill-CIMNE. 1994.
- [19] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. “El método de los elementos finitos. Mecánica de sólidos y fluidos, dinámica y no linealidad” Volumen 2, 4ª Ed. McGraw Hill-CIMNE. 1994.
- [20] Barbat, A.H., Canet, J.M. “Estructuras sometidas a acciones sísmicas”. 2ª Ed. CIMNE, Barcelona. 1994.
- [21] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. “El método de los elementos finitos. Dinámica de fluidos” Volumen 3, 5ª Ed. CIMNE, Barcelona. 2004.
- [22] Oñate, E. “Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis estático lineal”. 2ª edición. CIMNE, Barcelona, 1995.
- [23] Bathe, K. J. “Finite Element Procedures in Engineering Analysis”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1982.
- [24] Cook, R., Malkus, D.S. y Plesha, M.E. “Concepts and Applications of Finite Element Analysis”. 3rd. John Wiley & Sons. 1989
- [25] Dettmer, W., Perić, D. “A computational framework for fluid–structure interaction: Finite element formulation and applications” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 195, Issues 41-43, 15 August 2006, Pags 5754-5779
- [26] Tezduyar, T.E., Sathe, S., Stein, K. “Solution techniques for the fully discretized equations in computation of fluid–structure interactions with the space–time formulations” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 195, Issues 41-43, 15 August 2006, Pags 5743-5753
- [27] Codina, R. “Pressure Stability in Fractional Step Finite Element Methods for Incompressible Flows” Journal of Computational Physics, Volume 170, Issue 1, pp. 112-140. 2001
- [28] Belytschko, T., Kam Liu, W., Moran, B. “Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures”. John Wiley & Sons. 2000.
- [29] Mc Cormac, J.C. “Diseño de estructuras de acero. Método LRFD”. 2ª Ed. Alfaomega, México. 2002. Versión en español de la obra en inglés *Structural Steel Design: LRFD Method*, 2ª edición, publicada por John Wiley & Sons.

[30] “LRFD Manual of Steel Construction”. 3rd Edition. American Institute of Steel Construction. 2001.

ANEXO

Catálogo de perfiles usado en los ejemplos.

PTR H-50- Propiedades

Calidad Comercial:

ASTM-A-500-C

Resistencia a la tensión:

Mínimo 4270 kg/cm²

Límite de fluencia:

Mínimo 3500 Kg/cm²

Presentación:

Tramo de 6 m.

Usos:

Columnas, trabes, armaduras, polines, escaleras, cimbras. Torres, postes, grúas, soportes, carrocerías, maquinaria, elevadores

Dimensiones exteriores DXB	Espesor		Color de Identificación	Peso		Momento de inercia I		Momento de sección S		Radio de giro R		Sistema de embarque	
	Pulg.	mm.		P	A	Eje xx	Eje yy	Eje xx	Eje yy	Eje xx	Eje yy	Tramos por paq.	Peso paq. Kg
1X1 25X25	0.095	2.4	Verde	1.62	2.07	1.75	1.75	1.38	1.38	0.92	0.92	100	972
	0.133	3.4	Rojo	2.10	2.68	2.01	2.01	1.58	1.58	0.87	0.87	81	1021
1 1/2 X 1 1/2 38X38	0.110	2.8	Blanco	2.95	3.74	7.56	7.56	3.96	3.96	1.42	1.42	56	991
	0.125	3.2	Verde	3.29	4.17	8.21	8.21	4.3	4.3	1.4	1.4	49	967
	1.156	4	Rojo	3.91	4.95	9.24	9.24	4.85	4.85	1.36	1.36	42	985
2X2 51X51	0.11	2.8	Blanco	4	5.11	19.04	19.04	7.49	7.49	1.93	1.93	42	1008
	0.125	3.2	Verde	4.54	5.79	21.4	21.4	8.42	8.42	1.92	1.92	36	981
	0.156	4	Rojo	5.45	6.97	24.7	24.7	9.72	9.72	1.88	1.88	30	981
2 1/2 X 2 1/2	0.125	3.2	Blanco	5.84	7.4	44.07	44.07	13.88	13.88	2.44	2.44	30	1051
	0.141	3.6	Verde	6.47	8.26	48.3	48.3	15.2	15.2	2.42	2.42	25	970
	0.188	4.8	Rojo	8.32	10.6	59.1	59.1	18.7	18.7	2.36	2.36	20	998
3 X 3 76 X 76	0.125	3.2	Blanco	7.12	9.01	78.93	78.93	20.70	20.71	2.95	2.95	25	1068
	0.156	4	Verde	8.62	11	93.7	93.7	24.6	24.6	2.92	2.92	20	1034
	0.188	4.8	Rojo	10.2	13	108	108	28.3	28.3	2.9	2.9	16	979
3 1/2 X 3 1/2	0.125	3.2	Blanco	8.39	10.62	128.53	128.53	28.91	28.91	3.47	3.47	20	1007
	0.156	4	Verde	10.2	13	154	154	34.6	34.6	3.45	3.45	16	979
	0.188	4.8	Rojo	12.1	15.4	179	179	40.1	40.1	3.4	3.4	16	1162
	0.25	6.4	Azul	15.6	19.9	220	220	49.5	49.5	3.33	3.33	12	1123
3 X 2 76 X 51	0.125	3.2	Blanco	5.84	7.4	57.41	30.53	15.07	12.02	2.78	2.03	30	1051
	0.141	3.6	Verde	6.47	8.26	63.3	33.4	16.6	13.2	2.77	2.01	25	970
	0.188	4.8	Rojo	8.32	10.6	77.4	40.7	20.3	16	2.69	1.96	20	998
4 X 2 102 X 51	0.125	3.2	Blanco	7.12	9.01	117.34	39.69	23.09	15.62	3.6	2.09	24	1025
	0.156	4	Verde	8.62	11	139	46.6	27.5	18.4	3.56	2.07	20	1034
	0.188	4.8	Rojo	10.2	13	161	53.7	31.8	21.1	3.51	2.03	18	979
4 X 3 102 X 76	0.125	3.2	Blanco	8.39	10.62	156.41	100.45	30.79	26.36	3.93	3.07	20	1007
	0.156	4	Verde	10.2	13	187	120	36.9	31.5	3.81	3.05	16	979
	0.188	4.8	Rojo	12.1	15.4	218	139	42.9	36.5	3.76	3	16	1162
	0.25	6.4	Azul	15.6	19.9	269	171	52.9	44.8	3.67	2.93	12	1123
4 X 4 102 X 102	0.156	4.0	Amarillo	11.83	15.27	241.01	241.01	48.48	48.48	3.98	3.98	16	1136
	0.250	6.4	Azul	18.20	23.20	342	342	67.3	67.3	3.84	3.84	12	1310
5 X 5 127 X 127	0.250	6.4	Azul	23.20	29.60	705	705	111	111	4.88	4.88	9	1253
6 X 4 152 X 102	0.250	6.4	Azul	23.20	29.60	919	488	121	96.2	5.57	4.06	9	1256

Fuente: <http://www.serviacero.com/comercial/>